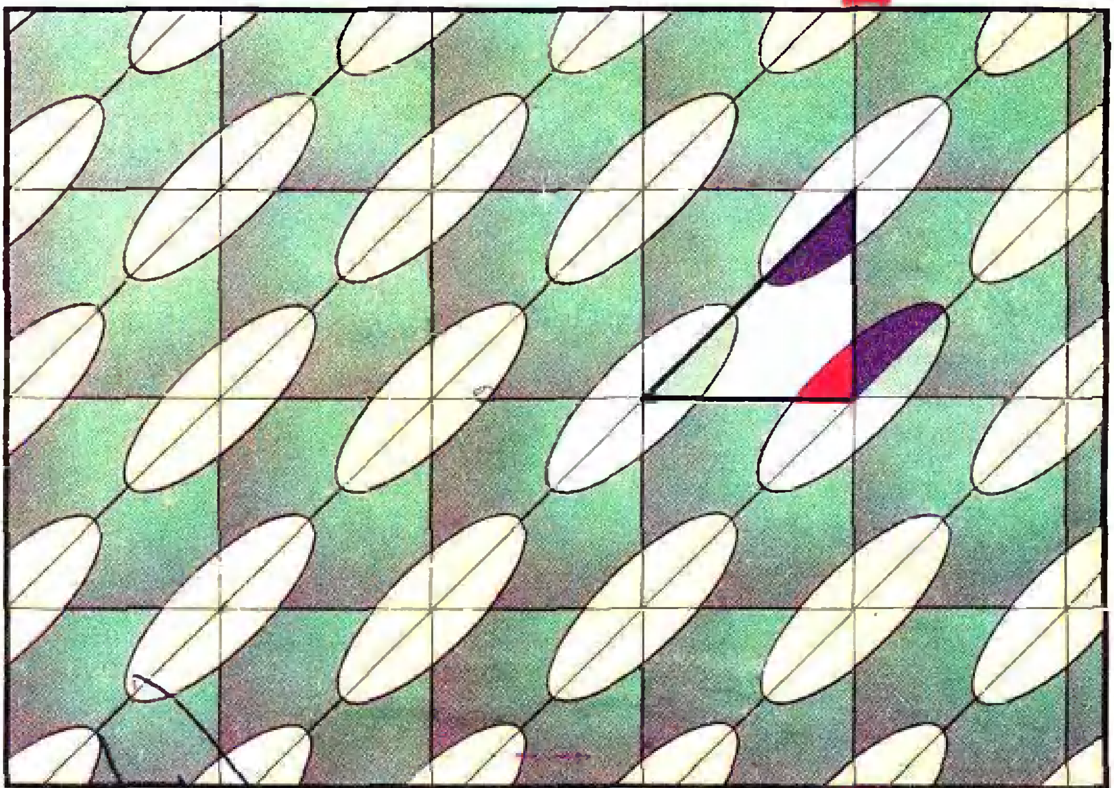
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Теорема Минковского

1991

Квант

10 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

М. РЕЙТМАН

Лестница фараона

Дворец фараона славился своей роскошью: жемчужные занавесы, стены, отделанные янтарем, золотая посуда — всего не перечесть. Но больше всего поражала тех, кто допускался в тронный зал дворца, золотая лестница, которая вела к трону. Как выглядела эта лестница в разрезе, если перевести древнеегипетские меры в дециметры, вы видите на рисунке 1. Археологам не пришлось долго ломать головы, чтобы понять, отчего ступени поначалу были такими низкими, все объяснялось просто: престарелый фараон не хотел, чтобы подданные видели, как тяжело ему взбираться на трон, они могли утратить почтение, а кто знает, чем это могло кончиться? Поэтому он и повелел придворным ювелирам сделать лестницу с такими низкими ступенями, не выше 1,5 дм.

Но время шло, и старый фараон скончался. Его молодой сын принял царство.

Молодой фараон слышал и раньше, как придворные посмеивались над наивной хитростью отца. И хотя сам он обычно взлетал на трон, прыгая через три ступеньки, но кривотолки продолжались. И молодой фараон решил покончить с ними, нарастив лестницу. Для этого он призвал придворных ювелиров и казначея и сказал им:

— Слуги мои! Повелеваю вам нарастить лестницу так, чтобы она имела самое большее четыре ступени. Устройте их, где хотите, но чтобы их было не больше четырех!

— Но государь,— робко вышел вперед казначей,— где взять столько золота? Вот я тут прикинул на листке папируса (и казначей показал то, что изображено на рисунке лестницы пунктиром). Лестница имеет ширину 1 м, или 10 дм. Значит, для ее наращивания понадобится $[3\times1{,}5+1{,}2\times(5+1)+1\times1+1\times3+0{,}8\,(3+4)+1{,}2\times11]\times10=345$ дм^3 золота! Увы, государь, столько не найдется в нашей казне, разоренной войной.

Рис. 1.

— Негодяй! Ты хочешь разорить страну! Да я сразу вижу, что ты и не думал всерьез об экономии! Смотри! — и фараон провел красную линию.— Ты всегда готов потратить лишнее золото!

— О мудрейший из фараонов! В самом деле, ты прав. Но это дает выигрыш лишь 90 дм^3, а $345-90=$ $=255$ дм^3 у нас тоже нет.

— Презренный! Ты бросаешь тень на мое могущество! Если через 7 дней лестница не будет готова, я сам утоплю тебя в священном Ниле, а ювелиры будут проданы в рабство. И не вздумай еще раз соваться со своими дурацкими чертежами!

Удрученным ушел казначей от фараона и отправился к своему другу. Не было человека искуснее, когда нужно было распланировать пирамиду или исчислить земельные наделы. Хотя друг и был по должности жрецом столичного храма, но слыл человеком расчетливым и практичным. Узнав о беде, он спросил:

— А сколько золота осталось в казне?

— 200 дм^3.

— Не густо! А может быть, можно обойтись меньшим количеством, если иначе распланировать ступеньки?

— Я пробовал,— вздохнул казначей,— но вариантов так много, а времени в обрез.

— Ладно, друг,— сказал жрец.— Дай мне подумать, и приходи завтра.

Когда на следующий день убитый горем казначей приплелся к жрецу, тот встретил его довольной улыбкой.

— А скажи, друг, могу ли я рассчитывать на оставшееся золото, если обойдусь меньшим количеством?

— О боги! — воскликнул казначей, не веря своему счастью.— Ты получишь еще дюжину рабов и столько же мер зерна!

— Так смотри же! — и жрец протянул ему лист папируса, где был другой проект наращивания лестницы.— Этот проект требует лишь 171 дм^3 золота. А остальные 29 дм^3 — мои!

— Но скажи, о величайший из вычислителей, как ты нашел такой вариант? Я пробовал и так и сяк, но он мне не попадался!

— Слушай же,— молвил жрец.— Сначала я разобрал случаи, когда лестницы из разного числа ступенек заменяются всего одной ступенькой. Чтобы числа были попроще, я буду вычислять только площадь f фигуры между сплошной и пунктирной линиями, а постоянный множитель, ширину лестницы, добавлю потом. Не возражаешь? Если бы первоначальная лестница состояла всего из одной ступеньки, то и наращивать было бы нечего:

$$f_1(1)=0.$$

Формула

$$f_1(2)=1{,}5\times 3=4{,}5$$

показывает, что если две первые ступеньки лестницы фараона заменяются одной ступенькой, на это требуется 4,5 дм^2. Аналогично найдем

$$f_1(3)=1{,}5\times 3+0{,}7\times(3+4)=9{,}4.$$

Ну а дальше

$$f_1(4)=9{,}4+1\times(3+4+1)=17{,}4,$$

$$f_1(5)=17{,}4+1{,}2\times(3+4+1+5)=33,$$

и так далее.

— Все это понятно,— возразил казначей,— но зачем мне одна ступенька? Ведь фараон просил четыре! Да и лестница имеет их сейчас не пять, а куда больше!

— Не торопись! — улыбнулся жрец.— Скоро новых ступенек станет больше — две (рис. 2). Но вначале найдем площадь одной ступени, начинающейся и на других ступенях первоначальной лестницы: их также легко посчитать одну за другой. Например, чтобы нарастить ступеньку от 2-ой до 4-й, требуется

$$g(2,4)=2{,}8+1\times 5=7{,}8\ \text{дм}^2.$$

Все эти числа, которые понадобятся в наших подсчетах, я записал в таблицу, которая поместилась на одном листе папируса (рис. 3). Числа $g(1,j)=f_1(j)$ в столбце «*одна* ступенька» мы уже посчитали, а дальше удобно вычислять ряд за рядом, двигаясь вправо и вверх: $g(2,3)$, $g(3,4)$, $g(2,4)$,

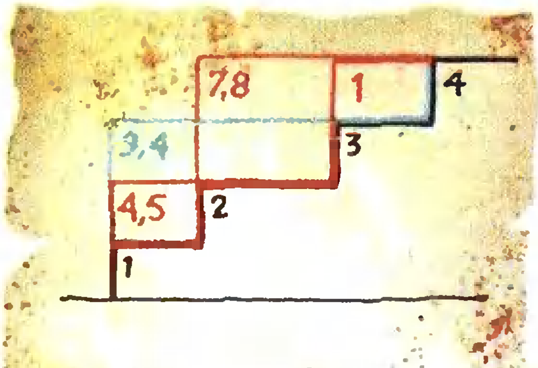
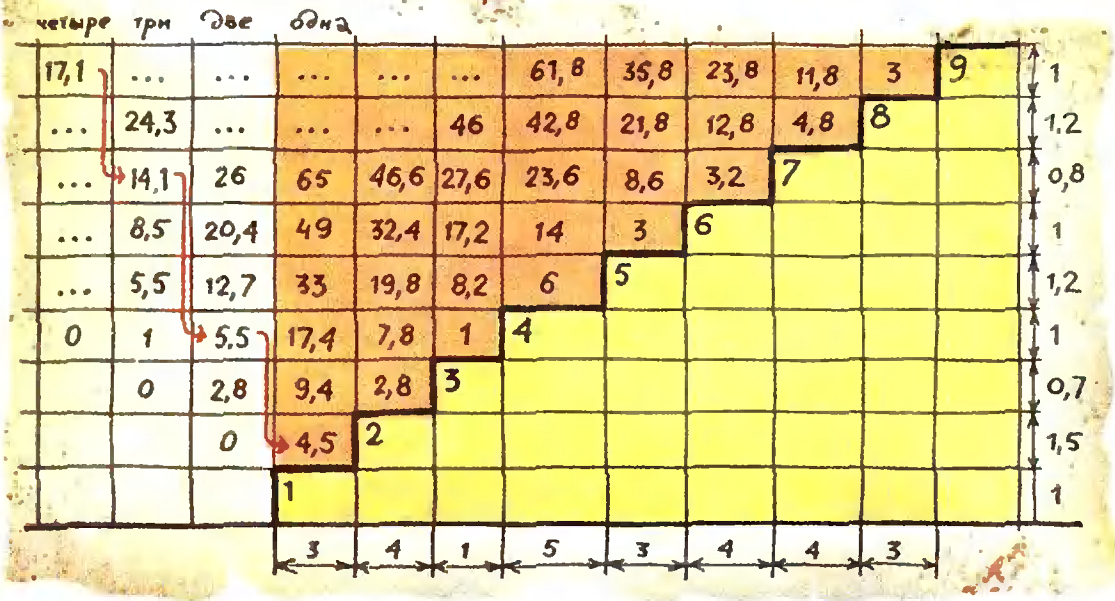


Рис. 2. Меньше всего золота требуется для наращивания красной лестницы: $f_2(4)=4,5+1=$ $=5,5$.

Рис. 3. Числа $g(i, j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant 9$ в темных клетках показывают, сколько золота требуется для одной ступени от i-й до j-й ступеньки первоначальной лестницы, а числа $f_k(j)$ в левой части ($k=2, 3, 4$) — какого минимального количества золота потребует лестница из k ступенек до j-го уровня.



$g(2,5)$, ... Давай теперь подсчитаем минимальные площади при двух ступеньках. $f_2(1)$ не имеет смысла, заменить одну ступеньку двумя мы не можем. Чтобы заменить две ступеньки двумя новыми, наращивать их не придется:

$$f_2(2)=0.$$

Вот $f_2(3)$ подсчитать несколько сложнее. Здесь нужно рассматривать два варианта и выбрать оптимальный: чтобы заменить первые три ступеньки двумя, мы должны нарастить либо вторую ступеньку, либо первую, и $f_2(3)$ равно наименьшей из соответствующих площадей:

$$f_2(3)=\min\{g(2,3);\ f_1(2)\}= \\ =\min\{\underline{2,8};\ 4,5\}=2,8.$$

Для отыскания $f_2(4)$ потребуется найти наименьшее из трех чисел (на рисунке 2 они показаны разными цветами):

$$f_2(4)=\min\{g(2,4), f_1(2)+g(3,4), \\ f_1(3)\}=\min\{7,8;\ \underline{4,5+1};\ 9,4\}=5,5,$$

и так далее... (Все эти вычисления приведены в таблице на рисунке 4.)

— Погоди, я понял, как найти наилучшую лестницу из двух ступеней, но ведь дальше число вариантов будет быстро возрастать: страшно даже подумать, какое количество лестниц из трех ступеней надо рассчитать,— а ведь нам нужна лестница из четырех ступеней! Неужели ты рассмотрел здесь все варианты?

— А в этом нет нужды, как ты сейчас увидишь. Например, найдем $f_3(4)$: наименьшую по площади лестницу из трех ступеней, заканчивающуюся на уровне 4-й старой ступени.

$f_2(3)=\min\{\underline{2,8};\ 4,5\}=2,8$
$f_2(4)=\min\{7,8;\ \underline{1+4,5};\ 9,4\}=5,5$
$f_2(5)=\min\{19,8;\ \underline{8,2+4,5};\ 6+9,4;\ 17,4\}=12,7$
$f_2(6)=\min\{32,4\ \ 17,2+4,5;\ \ 14+9,4;\ \ \underline{3+ +17,4};\ 33\}=20,4$
$f_2(7)=\min\{46,6;\ \ 27,6+4,5;\ \ 23,6+9,4;\ \ \underline{8,6+ +17,4};\ 3,2+33;\ 49\}=26$
$f_3(4)=\min\{\underline{1};\ 2,8\}=1$
$f_3(5)=\min\{0+8,2;\ 2,8+6;\ \underline{5,5}\}=5,5$
$f_3(6)=\min\{0+17,2;\ 2,8+14;\ \underline{5,5+3};\ 12,7\}=8,5$
$f_3(7)=\min\{0+27,6;\ 2,8+23,6;\ \underline{5,5+8,6};\ 12,7+ +3,2;\ 20,4\}=14,1$
$f_3(8)=\min\{0+46;\ 2,8+42,8;\ 5,5+21,8;\ 12,7+ +12,8;\ \underline{20,4+4,8};\ 26\}=25,2$
$f_4(9)=\min\{0+61,8;\ 1+35,8;\ 5,5+23,8;\ 8,5+ +11,8;\ \underline{14,1+3};\ 24,3\}=17,1$

Рис. 4.

Посмотрим, где может кончаться вторая ее ступень. Конечно, на 2-й или на 3-й старой. Но мы уже знаем, какая именно двуступенная лестница оканчивается на этом уровне: $f_2(2)= =0$, а площадь наилучшей двухступенчатой лестницы $f_2(3)=2,8$ мы уже нашли, так что

$$f_3(4)=\min\{g(3,4);\ f_2(3)\}= =\min\{\underline{1};\ 2,8\}=1.$$

— Постой, я хочу убедиться, что понял, как найти $f_3(5)$. Из трех ступеней, заканчивающихся на 5-й, вторая может закончиться на 2-й, 3-й или 4-й старой. Значит,

$$f_3(5)=\min\{g(3,5);\ f_2(3)+g(4,5);\ f_2(4)\}=\min\{8,2;\ 2,8+6;\ \underline{5,5}\}=5,5.$$

— Воистину, мудрые следят за казной государства,— польстил жрец.— Точно так же можно посчитать f_3 от 6, 7 и 8, а затем перейти к случаю с четырьмя ступенями. Теперь уже рассматривать $f_4(4), \ldots, f_4(8)$ нет нужды: мы точно знаем, что последняя четвертая ступенька кончается на старой девятой (иначе бы лестница имела больше четырех ступенек). Итак, нам остается найти $f_4(9)$ как минимум из сумм $f_3(j)+g(j,9)$, где j — одно из шести чисел $3, 4, \ldots, 8$; это число равно $f_3(7)+g(8,9)=14,1+3= =17,1$. Эта — минимальная из всех четырехступенных лестниц!

Значит, всего на лестницу понадобится $17,1\times10=171$ (дм^3) золота. А теперь давай найдем, где должны располагаться новые ступеньки. Заметим, что оптимальные варианты всюду подчеркнуты красным. В последний оптимальный вариант вошла стоимость трех новых ступеней $f_3(7)= =14,1$; значит, третья ступень должна кончаться на 7-й старой. Теперь вернемся на шаг назад к определению $f_3(7)$ и увидим, что в $f_3(7)$ входит стоимость первых двух ступеней $f_2(4)=5,5$. Следовательно, вторая ступень должна кончаться на 4-й старой. И, наконец, в выражение для $f_2(4)$ входит $f_1(2)=4,5$.

Значит, первую ступень новой лестницы нужно окончить на второй ступеньке старой. Окончательно, самая дешевая лестница изображена на рисунке 5.

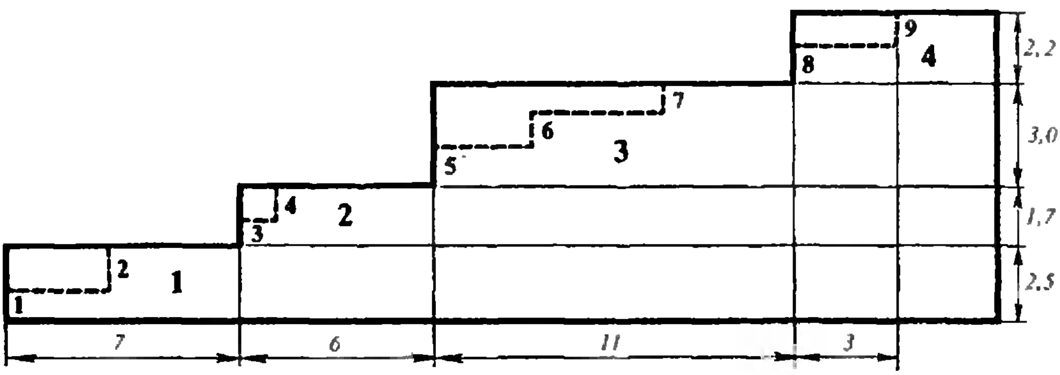


Рис. 5.

Теория динамического программирования

Мы не знаем, выполнил ли хитроумный казначей свое обещание жрецу, более того, мы не знаем, случилась ли вообще описанная история или она вымышлена. Но зато мы знаем, что она вполне могла произойти, ибо в рассмотренной задаче используются только два арифметических действия — сложение и умножение, а они были хорошо известны в Древнем Египте (хотя, конечно, обозначения чисел и операций, которые мы используем, появились значительно позднее). Ну и еще немного используется здравый смысл. А между тем здесь применен математический аппарат, который получил распространение лишь лет сорок назад; он называется динамическим программированием.

Вдумаемся, почему нам удалось найти оптимальное решение, не рассматривая всех возможных вариантов наращивания лестницы (а их очень много, и для их полного исследования жрецу действительно не хватило бы времени). Дело в том, что на каждом шаге мы разбивали общую задачу на ряд более простых.

Пусть требуется нарастить лестницу, имеющую N ступенек, так, чтобы она их имела n, где $N \gg n$, то есть N намного больше n. Допустим, что нам уже известно оптимальное распределение ступенек, когда их в новой лестнице меньше n. Пусть h_k — номер старой ступеньки, на которой кончается k-я новая. Очевидно, начинается эта k-я ступенька на $(h_{k-1}+1)$-й старой. Добавочную площадь, показанную на рисунке 6, обозначим через $g(h_{k-1}+1,\ h_k)$. Общая задача состоит в том, чтобы найти значения h_1, $h_2, \ldots, h_{k-1}$, при которых сумма k величин

$$g(1, h_1)+g(h_1+1, h_2)+\ldots$$
$$\ldots+g(h_{k-2}+1, h_{k-1})+g(h_{k-1}+1, h_k)$$

(при заданном $k=n$ и $h_k=h$) наименьшая, обозначим это наименьшее значение через $f_n(h_n)$. Заметим, что

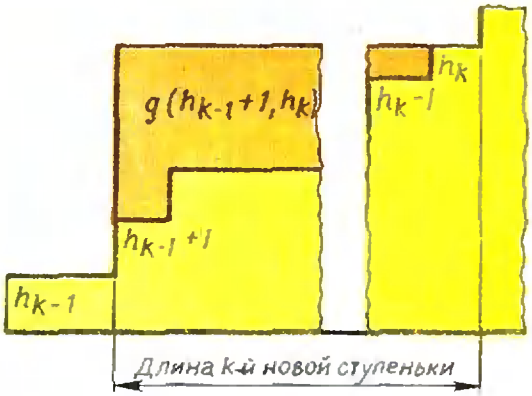


Рис. 6.

сумма первых $n-1$ слагаемых, в которые h_n не входит, принимает наименьшее значение $f_{n-1}(h_{n-1})$ — это та же задача для на 1 меньшего числа ступеней. В результате получаем замечательную формулу Р. Беллмана:

$$f_k(h_k)=\min\{f_{k-1}(h_{k-1})+g(h_{k-1}+1,\ h_k)\},$$

которая позволяет последовательно найти числа $f_k(h_k)$ (при всех $k \leqslant n$, $h_k \leqslant h$) на каждом шаге. Ее нужно понимать так: для отыскания минимума следует придавать k все возможные значения, начиная с 1, и для каждого найти и запомнить значение h_{k-1}, доставляющее наименьшую величину $f_k(h_k)$. А затем, дойдя до последнего значения $k=n$, нужно, «пятясь», вернуться назад и найти все оптимальные значения h_{n-1}, $h_{n-2}, \ldots$ $\ldots, h_1$ (см. красные стрелки на рисунке 3).

Обсуждение метода и немного истории

Обратим внимание на то, что в описанном методе не накладывается никаких условий на вид функций g (этим динамическое программирование выгодно отличается от линейного, в котором требуется, чтобы все рассматриваемые зависимости были линейными и переменные изменялись непрерывно). Существенно лишь, что функцию f, минимум которой мы ищем, удается представить в виде суммы членов, в которой предыдущий зависит от меньшего числа переменных. Поэтому уравнение Р. Беллмана и вышеописанный метод используются сейчас очень широко. Но, разумеется, не для удовлетворения прихотей фараонов. Попробуйте без него найти оптимальное соотношение весов ступеней космической ракеты, определить наилучший принцип унификации деталей, построить расписание, в котором было бы меньше всего простоев! Вы очутитесь в отчаянном положении казначея, сникшего перед обилием возможных вариантов. Разумеется, вручную с помощью динамического программирования почти не считают. Зато оно хорошо приспособлено для счета на ЭВМ и не содержит всяких «подводных камней», которые, к сожалению, встречаются в линейном программировании и других методах отыскания минимумов для функций от многих переменных.

Идея метода динамического программирования витала уже давно. В какой-то мере ее применял еще К. Маклорен (1698—1746) и даже Архимед. Однако окончательно оформилась она в работах американского математика Р. Беллмана и связывается с его именем.

Мы здесь показали применение динамического программирования к весьма простой задаче. Насколько применим этот метод к задачам более сложным? На этот вопрос нужно отвечать с известной осторожностью. Дело в том, что при этом возникает специфическая трудность, которую назвали «проклятием размерности». Приходится перебирать так много разных возможностей и запоминать столько результатов, что метод теряет свои положительные черты. «Второе дыхание» метод динамического программирования обрел благодаря «распараллеливанию» вычислений, которому в последние годы уделяется все больше внимания специалистами по программированию и конструкторами вычислительных машин.

Еще одно приложение

Одно из сравнительно новых применений динамического программирования — молекулярная биология, где «банки данных» содержат биологические последовательности (ДНК, РНК, белков), насчитывающие в сумме многие миллионы «букв», так что в их анализе не обойтись без компьютеров. Молекулы ДНК, содержащие генетическую информацию,— это длинные слова из четырех букв (А, Г, Ц, Т). В процессе эволюции, в результате мутаций, последовательности меняются: одна буква может замениться на другую, выпасть, а может добавиться новая. Насколько похожи два фрагмента — каким наименьшим числом превращений можно один из них получить из другого? Вот точная формулировка задачи такого типа. *Заданы два «слова» (длины m и n), состоящие из букв А, Г, Ц, Т. Найти подпоследовательность наибольшей длины, входящую в то и другое слово.* Опишем простую, предложенную в начале 70-х годов, процедуру, которая решает эту задачу (биологи называют ее алгоритмом Нудельмана — Вунша). Запишем одно из данных слов — $x=(X_1, X_2, \dots, X_m)$ — снизу-вверх, а другое — $y=$

Ц	1	2	3	3	4	5	5	6	7
Т	1	2	2	3	4	5	5	6	7
Г	1	2	2	3	4	4	5	6	6
Г	1	2	2	3	4	4	5	5	5
А	1	1	2	3	4	4	4	4	4
Т	1	1	2	3	3	4	4	4	4
А	1	1	2	3	3	3	3	3	3
Ц	0	1	2	2	2	2	2	2	2
Г	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	А	Г	Ц	А	А	Т	Г	Г	Т

Рис. 7. Одна из последовательностей максимальной длины 7: ГЦААГГТ.

$$\begin{array}{llllllll} x= & \text{—} & \boxed{\text{ГЦА}} & \text{Т} & \boxed{\text{А}} & \text{—} & \boxed{\text{ГГТ}} & \text{Ц} \\ y= & \text{А} & \boxed{\text{ГЦА}} & \text{—} & \boxed{\text{А}} & \text{Т} & \boxed{\text{ГГТ}} & \text{—} \end{array}$$

Рис. 8. Одно из наилучших «выравниваний» двух слов, найденное на рисунке 7.

$=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ — слева-направо рядом с таблицей размерами $m\times n$ (рис. 7). Отметим те клетки таблицы, в строке и столбце каждой из которых стоят одинаковые буквы (в таблице на рисунке 7 художник закрасил эти клетки голубым цветом). Теперь будем заполнять таблицу числами a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ \ j=1,2,\ldots,n)$ по следующему правилу: a_{ij} равно наибольшему из чисел $a_{i-1,j}$, $a_{i,j-1}$ и (если клетка (i, j) отмечена!) $a_{i-1,j-1}+1$. Конечно, нужно задать еще начальные условия. Они таковы: $a_{11}=1$, если первые буквы X_1 и Y_1 наших слов совпадают (при этом $a_{i1}=a_{1j}=1$ для всех i, j); если же нет, то $a_{11}=a_{12}=\ldots=a_{1,j-1}=0$ и $a_{1j}=\ldots=a_{1n}=1$, если первые $j-1$ букв второго слова y отличны от X_1, а j-я буква $Y_j=X_1$; аналогично, $a_{21}=\ldots=a_{i-1,1}=0$, $a_{i1}=\ldots=a_{m1}=1$, если X_i — первая из букв слова x, совпадающая с Y_1.

Итак, вычисляя каждый раз максимум из двух или трех чисел,— и запоминая, как и в задаче фараона, наш путь,— мы за $m\cdot n$ шагов заполним всю таблицу.

Проверьте, что последнее число a_{mn} будет равно длине наибольшей общей подпоследовательности наших двух слов, а саму эту подпоследовательность можно прочесть, двигаясь в обратном порядке (иногда, возможно, путь и не единственный). Биологи обычно изображают результат как «выравнивание» (*alignement*) двух данных слов (рис. 8). Сходные быстрые и требующие мало памяти алгоритмы можно найти и для других похожих задач: например, замене букв можно приписать другой «вес», чем удалению (или вставке); в белковых последовательностях (это — слова из 20 аминокислотных «букв») разумно сопоставить каждой паре букв свой «вес», отражающий степень их сходства (измеряемую, например, частотой замен одной буквы на другую). Очень важна и задача «множественного выравнивания» сразу нескольких слов, но с ростом числа слов количество необходимых операций в ней быстро растет.

Упражнения

1. Для школьной мастерской решили сначала купить 9 разных токарных станков стоимостью 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160, 190 рублей. Каждый из последующих станков в этом ряду может заменить любой предыдущий, но не наоборот. Например, станок за 100 рублей может обрабатывать те же детали, которые обрабатывает станок за 40 рублей. Однако директор школы возразил:

— Слишком много типов станков! Нам будет трудно их обслуживать — ведь для каждого нужны свои запчасти. Давайте купим 9 станков, но всего четырех разных типов, причем так, чтобы купленные станки обладали не меньшими возможностями, чем исходные 9 станков.

— А какие типы станков мы возьмем?

— Выберем их так, чтобы заплатить за все 9 станков поменьше. Евгений Иванович, вы поможете нам выбрать типы станков? — обратился он к учителю математики.

Какие типы станков предложил выбрать учитель и сколько они стоили?

2. То, что предложил проделать директор в предыдущей задаче, называется унификацией. Обычно на практике унификация дает экономическую выгоду. Но как эту выгоду подсчитать?

Пусть снова имеется 9 станков со стоимостями 16, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 28, 33 рубля. Требуется составить из них унифицированные серии, как это было сделано раньше, считая, что объединение станков в серии за счет упрощения обслуживания дает снижение затрат на серию по следующей таблице:

Число станков в серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Снижение стоимости	0	12	16	18	20	20	21	21	21

3. Дополните таблицы на рисунке 2, чтобы найти самую экономную лестницу из 5 ступеней; сколько золота на нее потребуется?

ТЕОРЕМА ФЕРМА — ЭЙЛЕРА О ДВУХ КВАДРАТАХ

Доктор физико-математических наук
В. ТИХОМИРОВ

Взгляните на несколько первых простых чисел: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... Числа 5, 13 и 17 представимы, как суммы двух квадратов:

$5=1^2+2^2$, $13=2^2+3^2$, $17=1^2+4^2$,

а остальные написанные числа (3, 7, 11, 19) так представить нельзя. Можно ли дать какое-нибудь объяснение этому наблюдению? Оказывается, что возможно, а именно справедлива следующая

Теорема. *Для того, чтобы простое число было представимо в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы оно при делении на четыре давало в остатке единицу.*

(Действительно, $5=4\cdot1+1$, $13=4\cdot3+1$, $17=4\cdot4+1$, тогда как $3=4\cdot0+3$, $7=4\cdot1+3$, $11=4\cdot2+3$, ...)

Немного истории

Кто и когда впервые обнаружил это явление? Есть свидетельство, что этот результат в конце прошлого года мог праздновать свое трехсотпятидесятилетие. Ибо на Рождество 1640 года (в письме от 25.12.1640 г.) великий Пьер Ферма (1601—1665) извещал знаменитого Мерсенна, верного друга Декарта и главного посредника в переписке ученых своего времени, о том, что «Всякое простое число, которое при делении на четыре дает единицу, единственным способом представимо, как сумма двух квадратов».

В ту пору математических журналов еще не существовало, информацией обменивались в письмах и, как правило, результаты лишь анонсировались и не сопровождались доказательствами.

Правда, спустя почти 20 лет после письма Мерсенну в письме к Каркави, отправленном в августе 1659 г., Ферма приоткрывает замысел доказательства сформулированной выше теоремы. Он пишет, что основная мысль доказательства состоит *в методе спуска*, позволяющем из предположения, что для какого-то простого числа вида $4n+1$ заключение теоремы неверно, получить, что оно неверно и для меньшего числа и т. д., пока мы не доберемся до числа пять, когда окончательно придем к противоречию.

Первые доказательства были найдены Эйлером (1707—1783) между 1742 и 1747 гг. Причем, желая утвердить приоритет Ферма, к которому он испытывал чувство глубокого уважения, Эйлер придумал доказательство, отвечающее описанному выше замыслу Ферма. Воздавая должное обоим великим ученым, мы называем эту теорему *теоремой Ферма — Эйлера*.

Есть свойство, присущее почти всякому прекрасному математическому результату (равно, как и почти любой неприступной и прекрасной горной вершине): к нему можно добраться разными путями, его можно штурмовать с разных сторон, и все пути доставляют наслаждение тому, кто не устрашится ими проследовать.

Я хочу продемонстрировать все это на примере теоремы Ферма — Эйлера.

К вершине, открытой в XVII веке, мы пройдем тремя различными путями. Один из них был открыт в XVIII, другой — в XIX, а третий — уже в XX веке.

Доказательство Лагранжа

Это доказательство (с некоторыми модификациями) излагается ныне почти во всех руководствах по теории чисел. Оно опирается на так называемую лемму Вильсона (1741—1793): *если p — простое число, то число $(p-1)!+1$ делится на p.*

Чтобы не отвлекаться на доказательство этого вспомогательного результата, продемонстрируем здесь лишь основную идею этого доказательства на примере простого числа 13. Для любого числа между двумя и одиннадцатью (включая сами эти числа) найдем такой множитель, что их произведение при делении на 13 даст единицу:

$$(13-1)!=12!=$$
$$=(2\cdot7)(3\cdot9)(4\cdot10)(5\cdot8)(6\cdot11)\cdot12$$
$$(2\cdot7=14=13+1,$$
$$3\cdot9=27=2\cdot13+1,$$
$$4\cdot10=40=3\cdot13+1,$$
$$6\cdot11=66=5\cdot13+1).$$

Из написанных равенств следует, что 12! при делении на 13 дает в остатке 12, т. е. $12!+1$ делится на 13. Аналогичную конструкцию можно осуществить и в общем случае.

Из леммы Вильсона извлечем такое следствие: *если $p=4n+1$ — простое число, то $((2n)!)^2+1$ делится на p.* Действительно, поскольку (лемма Вильсона) $(4n)!+1$ делится на p, простейшими тождественными преобразованиями получаем

$$(4n)!+1=$$
$$=1\cdot2...(2n)\cdot(2n+1)...(4n)+1=$$
$$=1\cdot2...2n(p-2n)(p-2n-1)...$$
$$....(p-1)+1=(2n)!(-1)^{2n}(2n)!+$$
$$+pk+1\equiv((2n)!)^2+1(\mathrm{mod}\,p),$$

откуда все и следует. Обозначим $(2n)!$ через N. Тем самым, мы доказали, что $N^2\equiv-1(\mathrm{mod}\,p)$.

Теперь нам предстоит преодолеть главную трудность.

Рассмотрим все пары целых чисел $(m;\ s)$ такие, что $0\leqslant m,\ s\leqslant[\sqrt{p}]$ ($[\sqrt{p}]$ — целая часть $\sqrt{p}$). Число таких пар равно $([\sqrt{p}]+1)^2>p$. Значит, по крайней мере для двух различных пар $(m_1;\ s_1)$ и $(m_2;\ s_2)$ остатки от деления m_1+Ns_1 и m_2+Ns_2 на p будут одинаковыми, т. е. число $a+Nb$, где $a=m_1-m_2$, $b=s_1-s_2$, будет делиться на p. При этом $|a|<\sqrt{p}$, $|b|<\sqrt{p}$. Но тогда число $a^2-N^2b^2=(a+Nb)\times\times(a-Nb)$ делится на p и, значит, учитывая, что $N^2\equiv-1(\mathrm{mod}\,p)$, получим, что a^2+b^2 делится на p, т. е. $a^2+b^2=rp$, где r — натуральное число ($r\neq0$, т. к. иначе пары были бы одинаковые). С другой стороны, $a^2+b^2<2p$, т. е. $r=1$ и $a^2+b^2=p$. Теорема доказана.

Доказательство Д. Цагира

Это доказательство, принадлежащее современному математику Д. Цагиру, совершенно потрясло меня: это какое-то чудо, когда результат получается как бы из ничего. Вот это доказательство.

Рассмотрим преобразование, которое тройке натуральных чисел $(x;\ y;\ z)$ сопоставляет три числа $(x';\ y';\ z')$ по следующему правилу:

$$x'=x+2z,\ y'=z,\ z'=y-x-z,\ \text{если } x<y-z, \quad (1)$$

$$x'=2y-x,\ y'=y,\ z'=x-y+z,\ \text{если } y-z\leqslant x\leqslant2y, \quad (2)$$

$$x'=x-2y,\ y'=x-y+z,\ z'=y\ \text{в остальных случаях.} \quad (3)$$

Обозначим это преобразование буквой B:

$$B(x;\ y;\ z)=(x';\ y';\ z').$$

Очень легко проверить, что преобразование B сохраняет форму x^2+4yz. Сделаем это, например, для случая (1).

Имеем:

$$x'^2+4y'z'=(x+2z)^2+4z(y-x-z)=$$
$$=x^2+4xz+4z^2+4yz-4xz-4z^2=$$
$$=x^2-4yz.$$

В остальных случаях проверка столь же проста. Значит, если для какого-то числа p имелось равенство $x^2+4yz=p$, то оно сохранится и после преобразования B.

Проверим, что преобразование B

инволютивно, т. е. дважды примененное оно возвращает нас назад. Снова проделаем это для (1).

Пусть $x<y-z$, тогда $x'=2z+x$, $y'=z$, $z'=y-x-z$, откуда $x'=x+2z>y'-z'=2z+x-y$ и, значит, $B(x';y';z')$ надо вычислять по правилу (3):

$$x''=x'-2y'=x+2z-2z=x,$$
$$y''=x'-y'-z'=$$
$$=x+2z-z+y-x-z=y,$$
$$z''=y'=z.$$

И в остальных случаях все аналогично.

А теперь предположим, что p — простое число вида $4n+1$. Тогда, во-первых, уравнение $x^2+4yz=p$ разрешимо по крайней мере двумя способами: $x=1$, $y=n$, $z=1$ или $x=y=1$, $z=n$. И, во-вторых, это уравнение имеет конечное число решений. Если предположить, что среди его решений нет таких, при которых $y=z$ (ведь если таковые имеются, то и доказывать нечего: $p=x^2+(2y)^2$), мы получим, что преобразование B разбивает все решения на пары $((x;y;z);$ $B(x;y;z))$, если только $(x;y;z)\neq B(x;y;z)$. Посмотрим, существуют ли такие пары или, как говорят, имеются ли у преобразования B *неподвижные точки*.

Очень легко понять, посмотрев на формулы (1)—(3), что неподвижные точки у B — те, для которых $x=y$. Но при $x=y>1$ решений у уравнения $x^2+4yz=p$ нет (ибо p не делится на y). Значит, есть только одна неподвижная точка $(1;1;n)$. Из всего сказанного вытекает, что число решений уравнения $x^2+4yz=p$ нечетно: неподвижная точка $(1;1;n)$, а остальные решения разбиваются на пары.

Однако, есть еще одно преобразование, обозначим его J, которое y и z меняет местами: $J(x;y;z)=(x;z;y)$. Оно, конечно, тоже инволютивно. Посмотрим, какие тройки (из наших решений уравнения $x^2+4yz=p$) оно оставляет на месте, т. е. каковы те $(x;y;z)$, что $(x;y;z)=(x;z;y)$. Мы условились ранее, что $y\neq z$. Но тогда и неподвижных точек нет! Значит, все решения разбиваются на пары. То есть число решений четно! Но только что мы утверждали, что число решений нечетно. Получилось противоречие. Значит, обязано существовать решение уравнения $x^2+4yz=p$, где $y=z$, т. е. p — сумма двух квадратов. Теорема доказана.

Третье доказательство

Немного модифицированное доказательство Минковского, о котором мы сейчас расскажем, пожалуй, еще больше поражает воображение. К сожалению, оно чуть-чуть неэлементарно, а именно, требует знания того, что такое эллипс и формулы площади эллипса.

Все начинается с одного результата Минковского, который, казалось бы, особого отношения к теореме Ферма — Эйлера не имеет.

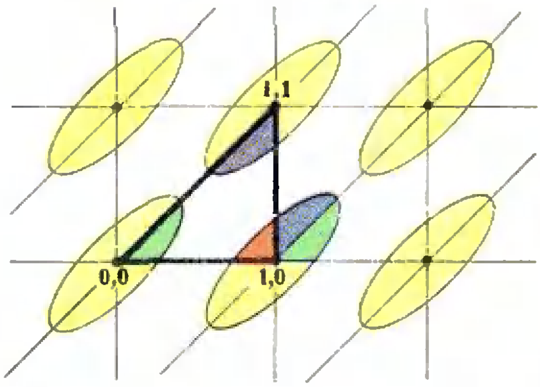
Теорема. *Пусть a, b и c — целые числа, при этом $a>0$ и $ac-b^2=1$. Тогда существует целочисленное решение уравнения $ax^2+2bxy+cy^2=1$.*

Доказательство. Возьмем декартову прямоугольную координатную систему на плоскости и зададим в ней скалярное произведение формулой:

$$((x;y);(x';y'))=$$
$$=axx'+bxy'+bx'y+cyy'.$$

Это скалярное произведение порождает «расстояние» от начала координат до точки $(x;y)$:

$$d((0;0),(x;y))=\sqrt{((x;y),(x;y))}=$$
$$=(ax^2+2bxy+cy^2)^{1/2}.$$



Найдем кратчайшее «расстояние» от начала координат до какой-либо отличной от точки (0; 0) точки целочисленной решетки $(m;\ n)$ (m и n — целые числа). Пусть это расстояние равно $\hat{d}$ и достигается оно на точке решетки $(\hat{m};\ \hat{n})$ так, что

$$a\hat{m}^2+2b\hat{m}\hat{n}+c\hat{n}^2=\hat{d}^2. \qquad (4)$$

Множество точек $(x;\ y)$ плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$ax^2+2bxy+cy^2\leqslant\hat{d}^2,$$

является эллипсом. Из нашего построения вытекает, что если этот эллипс гомотетически сжать в два раза, а затем разнести этот «сжатый» эллипс (параллельно самому себе) центром в точки целочисленной решетки, то все полученные эллипсы, если и будут пересекаться, то только лишь граничными точками.

Нетрудно понять (см. рисунок), что площадь, занимаемая пересечениями эллипсов с треугольником с вершинами (0; 0), (1; 0) и (1; 1), равна половине площади всего эллипса. А она — эта площадь — равна

$$\frac{\pi\hat{d}^2}{4}\det\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}=\frac{\pi\hat{d}^2}{4}(ac-b^2)=\frac{\pi\hat{d}^2}{4}$$

(вот единственное «неэлементарное» место!). Итак, площадь, занимаемая в треугольнике эллипсами, равна $\pi\hat{d}^2/8$, и это **лишь часть** площади треугольника, равной 1/2, т. е.

$$\pi\hat{d}^2/8<1/2 \Rightarrow \hat{d}^2<4/\pi.$$

Но $\hat{d}^2$ — целое число (посмотрите на формулу (4)). Значит, $\hat{d}^2=1$ и, следовательно, $\hat{d}=1$! Теорема Минковского доказана.

Но какое же эта прекрасная геометрия имеет отношение к Ферма и Эйлеру? Самое непосредственное!

Мы знаем из леммы Вильсона, что число b^2+1, где $b=((p-1)/2)!$, делится на p — не так ли? А теперь применим теорему Минковского к числам $a=p$, $b=((p-1)/2)!$ и $c=(b^2+1)/a$. Мы получим, что существуют целые числа m и n такие, что

$$1=am^2+2bmn+cn^2,$$

следовательно,

$$a=a^2m^2+2abmn+(b^2+1)n^2=$$
$$=(am+bn)^2+n^2.$$

Итак (вспомним, что $a=p$),

$$p=(am+bn)^2+n^2,$$

т. е. p есть сумма двух квадратов. И снова: теорема доказана!

Нам пишут

Наш читатель Я. Грозенский, исследуя последовательность квадратов целых чисел, получил, что

$$x^2=2(x-1)^2-(x-2)^2+2.$$

Затем для кубов он нашел, что

$$x^3=3(x-1)^3-3(x-2)^3+(x-3)^3+6,$$

а для четвертых степеней —

$$x^4=4(x-1)^4-6(x-2)^4+$$
$$+4(x-3)^4-(x-4)^4+24.$$

В своем письме он спрашивает, существует ли общая зависимость

$$x^n=n(x-1)^n+A_1(x-2)^n+\ldots$$
$$\ldots+A_k(x-k)^n+\ldots+A_n(x-n)^n+n!$$

Такая формула действительно существует:

$$x^n-C_n^1(x-1)^n+C_n^2(x-2)^n-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^kC_n^k(x-k)^n+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n(x-1)^n=n!,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты $\left(C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$.

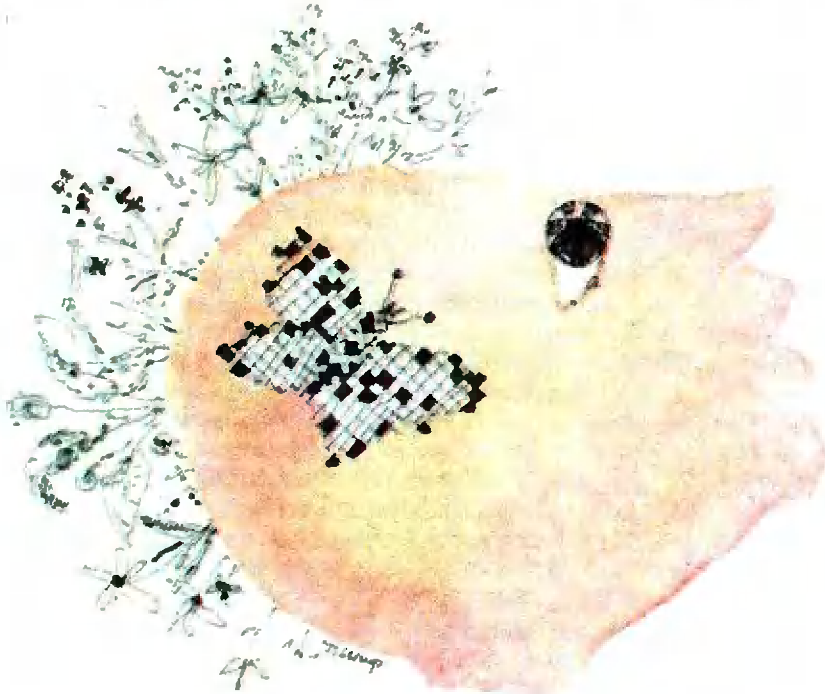
Попробуйте ее доказать.

В «Кванте» № 11 за 1989 год была опубликована статья Ю. Носова «Оптическая память». В ней рассказывалось о физических основах оптической памяти и обсуждались большие технические возможности оптических дисковых накопителей (ОДН). Публикуемую ниже статью, посвященную голографическим запоминающим устройствам (ГЗУ), можно рассматривать как развитие и продолжение первой статьи. Но читать ее можно независимо от первой.

ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ПАМЯТЬ

Доктор физико-математических наук
Ю. НОСОВ

Оптические дисковые накопители не только не вытеснили магнитные запоминающие устройства (ЗУ), но даже не поколебали их позиций — не так-то легко вскочить в быстро идущий поезд. Но заговорить о себе ОДН заставили — «невиданная плотность записи», «на смену магнитной памяти», «революция ЗУ», и т. д. и т. п.,— все чаще стали появляться сопоставления оптических и магнитных ЗУ. И невольно в этих сравнениях начинает фигурировать «идеальное ЗУ», то, к чему надо стремиться, эталон. Несомненно, что искусственная память будущего информационного общества не сведется лишь к огромной емкости и низкой стоимости, к тому, в чем состязаются друг с другом ОДН и магнитные ЗУ. Ориентиром, образцом все-таки остается человеческий мозг со всем многообразием его количественных и качественных особенностей, но мозг «улучшенный», усо-



вершенствованный так, как это способна сделать электроника, мозг, лишенный человеческих недостатков.

Конечно, первое, в чем выигрывает оптическая память по сравнению с магнитной, это плотность записи на носителе. Локальность лазерного воздействия обеспечивает выигрыш на 1—2 порядка, достигнутая плотность составляет 10^8 бит/см^2, в перспективе на тех же принципах можно преодолеть и рубеж 10^9 бит/см^2. Много это или мало? Судите сами. Еще в 1986 году на оптическом компакт-диске была записана вся Британская энциклопедия, а о предельной плотности записи тогда и не мыслилось. При использовании оптики королю рока Элвису Пресли, мировому рекордсмену по числу записанных песен (659!), потребовалось бы не 90 дисков-гигантов, а всего один компакт-диск.

Очень важно, что в ОДН информацию можно вводить не только в цифровой, но и в так называемой аналоговой форме — графики, рисунки, чертежи, тексты могут быть прямо вписаны лучом лазера на носитель. Благодаря этому существующие банки данных можно дополнить банками изображений — искусственная память станет богаче, разнообразнее.

Повышение плотности записи, относительная простота устройства и эксплуатации ОДН ведут к снижению «стоимости бита хранимой информации» — показателя, который, по мнению большинства авторитетов, оказывается определяющим, когда приходится выбирать между разными ЗУ. Многих привлекает в ОДН долговечность и надежность хранения информации — очень часто именно это становится решающим фактором. Оптические диски сохраняют выжженные метки и 10, и 30 лет, некоторые фирмы не боятся называть и круглую цифру 100 лет, а бесконтактность лазерного считывания — надежный гарант сохранения целостности записанного. На магнитных же носителях все не так: домены разрушаются за несколько лет, а при считывании головка почти скользит по поверхности, порой нанося ей повреждения.

Правда, оптическая память заметно уступает магнитной по времени выборки, что в общем-то естественно: в большем хранилище труднее отыскать нужное, чем в меньшем. И еще одно обстоятельство — оптическим дискам порой нелегко прорваться через заградительную сеть стандартов, выработанных для магнитной памяти за десятилетия. Этим стандартам ОДН не во всем удовлетворяют, свои пока что еще не созданы, а в промышленности соответствие стандарту — все равно, что предъявление пропуска в проходной.

Пока оптические и магнитные ЗУ выясняют между собой отношения, посмотрим, как те и другие соотносятся с природным ЗУ — человеческим мозгом. Хотя что же смотреть, ведь и так видно, что это, как якобы говорят в Одессе, две большие разницы. И все же... Естественно, что машинная и биологическая память одинаковы по функциональному назначению: запоминание («запись»), хранение, извлечение («считывание»). В мозге могут быть выделены механизмы оперативной и долговременной памяти. Первый основан на активных процессах возбуждения нервных клеток — так достигается быстродействие, но для этого нужны непрерывные затраты биоэнергии. Поэтому емкость такой памяти невелика, а стоит человеку уснуть, оперативная память стирается — все как в ЭВМ при отключении питания. Механизм долговременного запоминания основан на химических превращениях клеток (ну чем не перемагничивание доменов?), поэтому после записи дополнительные энергозатраты не нужны.

Емкость мозга огромна — на языке ЭВМ она оценивается числом 10^{12}—10^{13} бит (это несколько тысяч плотно заполненных оптических дисков). Но расходуется эта емкость очень аккуратно: даже за всю жизнь не срабатывается и 10—20 %. Поэтому-то мозг и способен так долго сохранять свежесть — лет 50, а то и больше. Достигается это жесткой самодисциплиной. Аппарат кратковременной памяти воздвигает преграду всему случайному, тому, что не должно осесть надолго. Кроме того, записанная информация, если сознание не обращается к ней, постепенно стирается. Как мозг расставляет метки, что сохранить, что стереть, какой механизм забывания ненужного, не очень ясно, но механизм этот сусуществует. Психологи считают, что способность запоминать и помнить достигает пика приблизительно к 25-летнему возрасту, а затем постепенно начинает ослабевать.

Здесь мы подошли к еще одному очень важному моменту. Запоминание информации мозгом нельзя даже с натяжкой сопоставить с перемагничиванием доменов или выжиганием лазерных меток. Этот процесс у человека не сводится к строго (или сухо) логическому, абсолютно точному, бесстрастному. Запоминая, человек что-то убирает из образа, а что-то и добавляет, сравнивает с чем-то ранее увиденным, подыскивает аналогии в совсем других областях, и т. п. Говоря обобщенно, это процесс творческий, запоминание информации всегда сочетается с ее одновременной обработкой.

Далее. Запись на оптический диск ведется последовательно бит за битом, ее так и называют «побитовой». И мозг проделывает приблизительно то же, когда человек, например, читает книгу. Но ведь более характерны другие ситуации... Вы вбежали в соседнюю комнату, из которой раздался хлопок, и мгновенно увидели дымящийся цветной телевизор, оценили расстояние от него до оконных занавесок, зафиксировали испуганные глаза младшей сестренки и еще многое другое. Мозг обладает способностью параллельного ввода информации, причем ввод этот осуществляется конвейерно, синхронно с течением времени или, как принято говорить в технике, в реальном масштабе времени. А оптическое ЗУ (да и магнитное тоже), как бы резво диск не вращался, восприняло бы эту картину (меточка за меточкой, ничего не пропуская) тогда, когда вряд ли это было бы уже нужно... И еще одно. Запись на дисках ведется по преимуществу цифровым методом, те аналоговые формы восприятия чертежей, кривых, гистограмм, которые доступны лазерному лучу, вряд ли можно считать действительно аналоговыми. Передача полутонов, цветовых оттенков, двумерных или тем более объемных картин требует огромного, порой фантастического объема цифровой информации. А аналоговое восприятие, присущее мозгу, пусть не такое точное, как цифровое, обходится совсем незначительными средствами.

Но не только тем, как запоминается информация, но и тем, что получается в итоге, биопамять принципиально отличается от искусственной. Лазерный луч помещает данный конкретный бит в конкретную точку диска, каждый бит имеет свой «адрес», ничто не перепутается, не потеряется. Это предмет гордости ОДН — в обилии выжженных точек сохранить идеальный порядок. Но так ли уж это идеально? А если царапина исказит диск, если вообще кусочек диска отколется? Все, что там было, пропадет безвозвратно. Правильно, скажете вы, ведь произошла катастрофа, как же ее предусмотреть и тем более преодолеть?

Нет, не правильно, возразит многоопытный мозг, повидавший разное за миллионы лет эволюции. Катастрофы так же естественны, как и нормальное течение жизни. И если к катастрофам не приспособиться, не выработать против них защитной реакции — вот это действительно будет катастрофа. Мозг к запоминанию даже простейшей информации привлекает большую группу клеток, причем не обязательно близких друг к другу. Запись как бы размазывается по всему объему памяти. В случае повреждения части «мозгового ЗУ» память ослабевает, но записанная ранее картина сохраняется полностью.

Теперь уже естественным представляется и различие в поиске и считывании информации сравниваемых видов памяти. Для машинных ЗУ типична адресная выборка — информация отыскивается точно по адресам, предписываемым программой. Мозг тоже способен на это, но он может извлекать желаемое и совсем другим способом. Речь идет об ассоциативном поиске, при котором выборка осуществляется по тем или иным качественным признакам, присущим большому массиву информации.

В новелле К. Чапека «Что видел поэт» инспектор полиции, расследуя наезд автомобиля на старушку, использует свидетельские показания очень рассеянного поэта, который при этом присутствовал и, придя домой, написал стихотворение, что называется по горячим следам. В нем были и такие строки: «О шея лебедя, о грудь, о барабан и эти палочки». Нарушителя обнаружили именно по «показаниям» поэта — номерной знак автомашины был — вы уже, конечно, догадались — 235. Конечно, ассоциативная выборка может приводить и к неточностям или ошибкам при считывании, но она резко ускоряет поиск, что особенно существенно при большой емкости памяти. Как и ранее — хорошо совмещать оба вида поиска, и мозг это может. Однако постараемся быть объективными — каким бы совершенством не являлся человеческий мозг, но «и на Солнце есть пятна». Хорошо, конечно, что, забывая, мозг защищает себя от полного износа. Но если он забывает то, что как раз хотелось бы сохранить? Или, наоборот, вдруг выплеснет из своих глубин такое, что во время урока вы неожиданно начинаете сотрясаться от едва сдерживаемого хохота. Мозгу трудно запоминать монотонные, ничем не примечательные цифровые данные — сколько, например, вы помните телефонных номеров? А в простейшей ДВК их могут храниться тысячи...

Рабочая температура мозга — наши неизменные 36,6, уже на отметке 37 мы ставим красную черту. А если допустить типичные для технических требований колебания на ± 3 °С? Хорошо еще, если $+3$ °С — воспаленное воображение хоть как-то будет цепляться за канву действительности. А если -3 °С? Такое, пожалуй, лучше и не представлять... Очень незначительные изменения давления, влажности, даже магнитного поля Земли, не говоря о вибрациях, ускорениях, ударах,— все это мозгу категорически противопоказано. Конечно, неплохо бы все это выправить, но приходится принимать мир таким, каков он есть.

И все-таки огромная емкость, надежное хранение, параллельно-последовательный ввод-вывод аналоговой и цифровой информации, адресный и ассоциативный поиск, обработка информации на всех стадиях записи, хранения, считывания — эта «визитная карточка» человеческого мозга не может не вызвать естественной зависти искусственной памяти.

Понятно, что дисковые накопители — оптические или магнитные,— как бы они не совершенствовались, никогда не смогут приблизиться к идеалу. Нужна какая-то новая идея, новый принцип, новый физический эффект.

Оказывается, подходящий эффект есть, этот эффект — оптический, и открыт он еще в 1947 году английским ученым венгерского происхождения Д. Габором. Это голография — способ записи световых потоков, существенно отличающийся от фотографии и значительно превосходящий ее своими возможностями. До 1960 года, пока не был изобретен лазер, позволяющий получать пучки когерентного света, голография «пребывала в спячке» (выражение Габора из речи по поводу присуждения ему Нобелевской премии 1971 года), но уже в 1961 году были получены первые лазерные голограммы.

В чем состоит основная идея голографической записи? О голографии написано немало, поэтому будем краткими. В фотографии свет, отраженный предметом, фокусируется объективом на поверхности пленки (или пластинки), покрытой фотоэмульсией. Чем больше интенсивность падающего света, тем сильней почернение негатива после проявления.

Но ведь свет — это электромагнитная волна, а она характеризуется не одной лишь интенсивностью. Важна частота колебаний, различные частоты воспринимаются глазом как разные цвета, и фотоснимок способен зафиксировать это различие (цветная фотография). Но волна обладает еще одной характеристикой — фазой. С этим понятием вы встречались при изучении интерференции — результат интерференции двух волн определяется разностью их фаз. Отраженная от разных точек предмета когерентная волна приходит к месту наблюдения с разными формами, т. е. фаза отраженной волны несет в себе информацию об объемной форме предмета. Но... на фотопластинке, которая фиксирует только интенсивность света, фаза волны безнадежно теряется. Ни один регистратор света не способен зафиксировать фазу световой волны: колебания происходят с такой высокой частотой (в миллионы раз превышающей частоту радиоволн), что и в фотоэмульсии, и в глазу человека неизбежно усреднение по очень большому числу колебаний, и отсюда — потеря фазы.

Голограмма получается без объектива, поскольку здесь изображение предмета не формируется. Вместо этого свет от лазера сначала расширяется, а затем расщепляется на два пучка при помощи полупрозрачного зеркала (рис. 1). Свет одного из этих

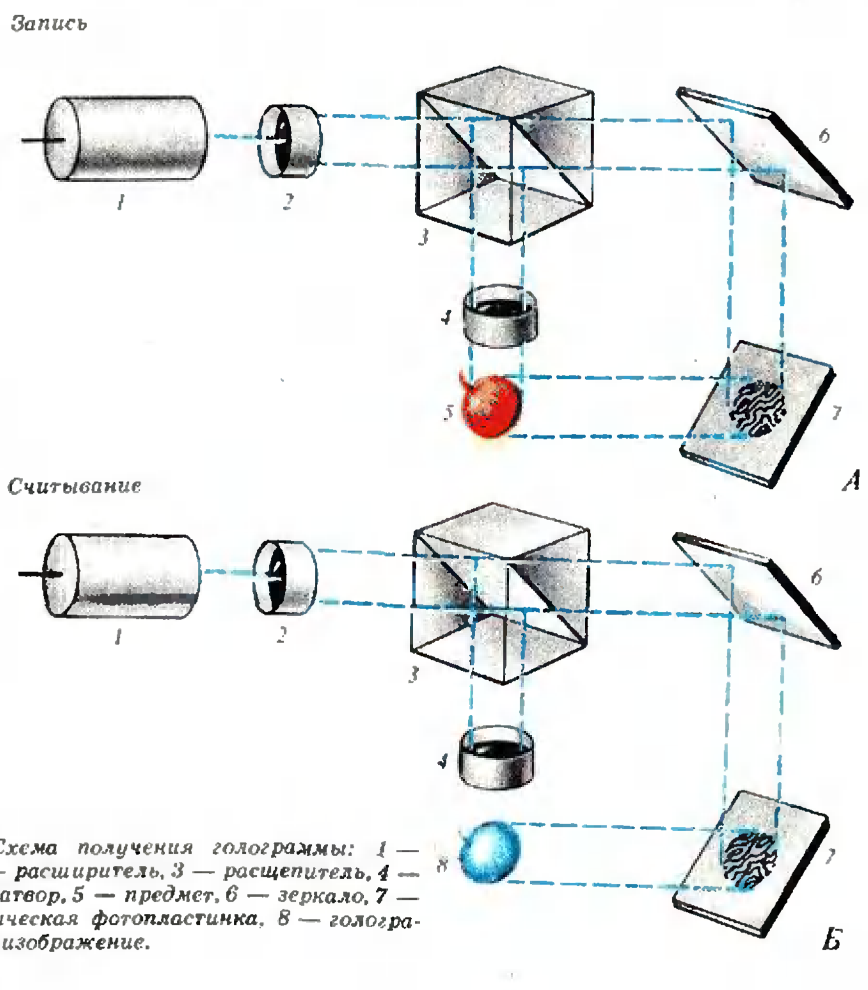


Рис. 1. Схема получения голограммы: 1 — лазер, 2 — расширитель, 3 — расщепитель, 4 — световой затвор, 5 — предмет, 6 — зеркало, 7 — голографическая фотопластинка, 8 — голографическое изображение.

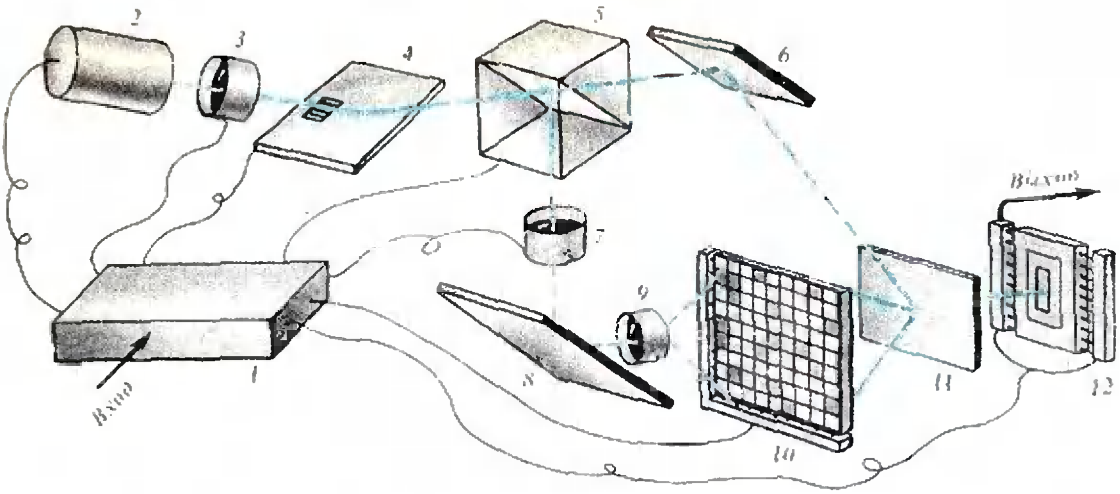


Рис. 2. Структурная схема голографического ЗУ: 1 — электронный блок управления, 2 — лазер, 3, 7 — световые затворы, 4 — дефлектор, 5 — расщепитель, 6, 8 — зеркала, 9 — расширитель, 10 — управляемый оптический транспарант, 11 — голографическая фотопластинка, 12 — матричный фотоприемник.

пучков (предметный пучок) направляется на предмет, который отражает его и рассеивает в сторону фотопластинки. Свет второго пучка (опорный пучок) прямо направляется на фотопластинку.

На фотоэмульсии фиксируется картина интерференции этих двух пучков, проявляющаяся в виде светлых и темных волнистых линий и точек без каких-либо внешних признаков изображения, скрытого в ней. Тем не менее эта картина, несмотря на кажущийся хаос, содержит полный зрительный образ предмета. Степень потемнения эмульсии определяется не только интенсивностью предметного пучка в этой точке (как при фотографии), а разностью фаз предметной и опорной волн. Если волны приходят в фазе, их амплитуды складываются, если в противофазе — вычитаются. Опорная волна, ничем не искажаемая, несет в себе как бы базу сравнения, начало отсчета для фазы предметной волны; иногда говорят, что голография содержит «встроенную оптику». Таким образом, интерференционная картина содержит в закодированном виде информацию и об амплитуде, и о фазе волнового фронта рассеянного предметом света, а это и означает полное изображение предмета.

Итак, на фотопластинке запечатлелась мгновенно остановленная, «замороженная» световая волна, отраженная предметом. Но как же в этой причудливой шифрограмме разглядеть сам предмет? Теперь это уже несложно, достаточно лишь воспользоваться принципом обратимости волн. Если осветить фотопластинку с записанной голограммой потоком света, в точности идентичным опорному (закрыть затвор 4; см. рисунок 1), то возникающее при этом изображение оказывается неотличимым во всех своих трех измерениях от вида реального предмета. Этот процесс называется восстановлением (считыванием) голограммы.

Голография, позволяющая записать, сохранить, считать световую волну со всеми ее тонкостями, естественно, привлекла к себе внимание тех, кто задумывался об оптической памяти. Еще в 1967 году, лет за пятнадцать до появления оптических дисковых накопителей, начали развиваться концепции голографических запоминающих устройств (ГЗУ). Но ограниченность технических средств не позволила достигнуть в ту пору успеха. Сегодня же, когда оптоэлектроника на подъеме,— иное дело.

Структурная схема голографического ЗУ (рис. 2) является естественным развитием схемы записи и восстановления голограмм и совершенно не похожа на ОДН ни составом элементов, ни системой связи между ними. Для голографии, как ясно из предыдущего, необходимы потоки излучения, представляющие собой идеально когерентные (или близкие к ним) световые волны,— иначе четких интерференционных картин не получить. Такое излучение могут дать только лазеры, да и то не все. Наивысшей степенью когерентности обладают газовые лазеры, полупроводниковые же пока еще большей частью для голографии непригодны. Но газовые лазеры, в отличие от полупроводниковых, работают лишь в непрерывном режиме, поэтому для их модуляции необходимы внешние модуляторы — это и объясняет появление в схеме ГЗУ оптических затворов *3* и *7*, прерывающих по программе лазерный луч.

Вводимая в память информация размещается на оптическом транспаранте. В простейшем случае — это фотопластинка с чередующимися темными и прозрачными областями: прозрачное место соответствует логической «единице», затененное — логическому «нулю». Но, переписав в память одну пластинку, надо чисто механически заменять ее другой — это медленно, неудобно, несовременно. Поэтому стали использовать управляемый оптический транспарант, в котором потемнение или просветление отдельных участков пластинки происходит по команде от электронного блока управления.

Процесс записи выглядит следующим образом. В транспарант «вписывается» страница информации — тот или иной набор темных и светлых пятен, затворы *3* и *7* на некоторое время открываются, и страница в виде голограммы переносится в левый верхний угол фотопластинки. На транспарант выводится новая страница информации, и в это же время вступает в игру дефлектор, назначение которого — изменять направление лазерного луча (от лат. deflectio — «отклоняю»). Затворы *3* и *7* вновь «щелкают», и вторая страница информации «оседает» на фотопластинке рядом с первой. Процесс повторяется многократно до заполнения всей фотопластинки — общее число голограмм может составлять сотни и тысячи. После проявления фотопластинка может сохраняться сколь угодно долго. При считывании информации дефлектор по команде от программатора «нацеливается» на нужную голограмму. Затем затвор *3* срабатывает (затвор *7* во время считывания остается закрытым, «запирая» предметный луч) — и восстановленная голограмма (т. е. ранее записанная страница черно-белых ячеек) отображается на многоэлементный матричный фотоприемник, содержащий столько же фоточувствительных элементов, сколько точек в странице. Возникающие на каждом элементе электрические импульсы последовательно подаются на выход устройства — считывание одной голограммы завершилось.

Чтобы ГЗУ от лабораторных образцов (а сегодня это так) шагнули к совершенным промышленным изделиям, необходима и совершенная элементная база. Высококогерентные мощные полупроводниковые лазеры; транспаранты, содержащие миллионы быстро перепрограммируемых ячеек; дефлекторы, быстро и безошибочно ориентирующиеся в тысячах близких, но все-таки разных направлений; многоэлементные высокочувствительные фотоприемники с электронным самосканированием сигналов — все это в принципе уже есть, все это ускоренно развивается и вот-вот станет достоянием разработчиков устройств памяти. Пессимист, правда, может заметить, что «вот-вот» растянулось уже более чем на 30 лет. Но — будем оптимистами и помечтаем о совершенных голографических ЗУ.

Лишь по плотности записи они сродни ОДН — и там и здесь все определяется длиной волны излучения лазера. А дальше начинаются различия,

(Окончание см. на с. 24)

ТРИГГЕРНЫЙ ЭФФЕКТ В ЧЕЛОВЕЧЕСКОМ ОРГАНИЗМЕ

(или Как переобуться на морозе)

Доктор физико-математических наук
В. ЗУЕВ

Выбранное мною название звучит довольно парадоксально, а я — не любитель парадоксов. Парадоксы, по моим наблюдениям, результат временного незнания связи явлений или чего-либо подобного.

Название настраивает на шутливый тон, и это хорошо, но речь тем не менее идет о серьезных вещах — ниже следует разъяснение некоторых особенностей поведения человеческого организма с точки зрения физики. Физика — моя профессия.

Спрашиваю себя: не лучше ли сразу же все объяснить и сразу же снять налет мистификации. Удерживает меня лишь заочный характер нашего общения: в устной беседе, темп которой может быть очень высок, а рассказчик следит за реакцией слушателей, сделать это было бы проще. Написанные объяснения — совсем иное дело. Поэтому начну излагать все по порядку.

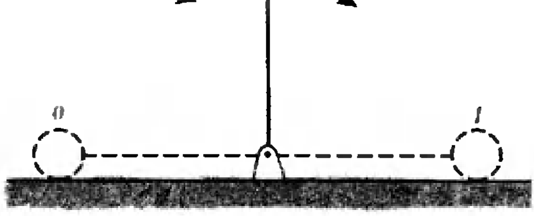
Триггер — это такой электронный прибор (электронная схема), который имеет два состояния покоя, два состояния устойчивого равновесия.

Сначала обратимся к механическому аналогу — к маятнику в виде жесткого стержня с грузом на одном конце и с шарниром — на другом, вроде маятника в старинных (довоенных) часах-ходиках. Однако наш маятник следует установить на столе грузом вверх, а шарниром вниз, т. е. совсем не так, как в часах-ходиках.

Маятник с грузом вверху в отвесном положении неустойчив: он падает либо влево, либо вправо от вертикали (см. рисунок) и ложится на бок на плоскость, на которой закреплен шарнир. Обозначим (для определенности) положение равновесия слева цифрой нуль, а положение равновесия справа — единицей.

Вернемся теперь к триггеру. На выходных клеммах этого электронного прибора либо есть определенное напряжение, например, 1 вольт, либо нет напряжения, т. е. 0 вольт. Внешний импульс, приходящий на вход триггера, изменяет его состояние, т. е. переводит триггер из того устойчивого состояния, в котором он находится (например, 0 на выходе), в другое (1 на выходе). Важно, что после переходного процесса триггер устойчиво выдает напряжение либо один вольт, либо нуль вольт. В этом смысле поведение триггера сходно с поведением механического маятника, установленного грузом вверх.

Триггер — самый распространенный прибор в современной электронике, как в профессиональной, так и в бытовой. Триггеры есть в электронных часах, в микрокалькуляторах, в персональных компьютерах,



в радиоприемниках с цифровой настройкой, в мощных вычислительных машинах. Ведь на самом внутреннем (для электронного прибора) уровне обработки информации как раз и происходит обмен последовательностями нулей и единиц.

Теперь пора перейти к вопросу о том, как правильно переобуться на морозе. Речь о том, как обуть промерзшие ботинки и не замерзнуть.

Опыт правильного обращения с промерзшими ботинками я приобрел, когда мальчишкой бегал на каток и там менял валенки на ботинки с беговыми коньками. Катались на коньках по нескольку часов, и ноги не замерзали на морозе 15—18 градусов.

Не знаю, как сейчас выглядят ботинки беговых коньков, а тогда это были легкие ботинки из тонкой хромовой кожи на тонкой кожаной подошве — почти как дамские туфли-лодочки (соответствующего размера), разве что в полтора-два раза тяжелее: дамские туфли изготавливают из лаковой кожи, она тоньше хромовой.

Для довершения описания ботинок беговых коньков следует отметить, что эти ботинки не имели никакой подкладки — ни шерстяной, ни войлочной; поролон в то время еще не был изобретен. Тонкие шерстяные носки следовало, естественно, надевать. И все это в силу жестокой борьбы за облегчение веса конька с ботинком — совсем, как при постройке дельтаплана.

Переобувались в холодном павильоне-раздевалке, где было почти так же морозно, как и снаружи.

Главная хитрость состояла в следующем: перед одеванием ботинка нужно было, как мы говорили, в него дыхнуть (неблагозвучно, но ничего не поделаешь, уже история...) теплым воздухом собственного дыхания, т. е. заполнить ботинок воздухом, нагретым собственными легкими. Если этого не сделать, то нога практически мгновенно замерзала. Если подышал в ботинок (достаточно одного выдоха, более того — именно одного, иначе ботинок отсыреет — в нем выпадет влага, в некотором смысле — роса) — нога не замерзнет.

Позднее, когда я узнал о теплоемкости, о внутренней энергии физических тел и тому подобном, я много лет удивлялся тому, как можно согреть легкий, но все-таки довольно массивный ботинок слабым дуновением — теплом одного выдоха легких. Опыт показывает, что в каком-то смысле — можно. Чтобы покончить с ботинком, заметим, что на короткое время выдохом легких можно согреть изнутри тонкий поверхностный слой кожи ботинка. Запомним этот факт.

К сожалению, подготовка к объяснению еще не закончена. Дополнительно следует объяснить, как реагируют на тепло и холод поверхностные покровы человеческого тела, ниже для краткости — кожа. В коже, а точнее — непосредственно под кожей, имеется слой, пронизанный многочисленными тонкими сосудами — капиллярами. Этот слой — теплообменник с окружающей средой. (Теплообменник есть у паровоза, автомобиля, спутника на орбите, в любом электронном приборе, даже на АЭС; человеческое тело тоже имеет свой теплообменник.) С его помощью температура человека поддерживается на постоянном уровне — 36,6 градуса по Цельсию. Если снаружи холодно, то поступление крови к поверхности тела уменьшается, теплоотдача вовне уменьшается. Если жарко — поступление крови увеличивается, теплоотдача вовне также увеличивается.

При медленных изменениях окружающей температуры кожа справляется со своими обязанностями, работает, как говорят, в нормальном режиме, и человек чувствует себя комфортно.

Вот теперь мы располагаем понятиями, с помощью которых сможем объяснить, почему промерзший ботинок следует слегка согреть изнутри собственным дыханием.

Имеем две ситуации. В первой ситуации надеваем холодный ботинок. Кожа ощущает холод и реагирует таким образом, чтобы уменьшить теплоотдачу. А нам нужно, чтобы ботинок нагревался и побыстрей. Нам нужна мощная теплоотдача, чтобы теплоподвод к ботинку был большим. Но... Итог обсуждения первой ситуации, на мой взгляд, таков: нога в ботинке, скорее всего, замерзнет.

Во второй ситуации имеем дело со слегка нагретым ботинком, точнее, внутренняя поверхность ботинка теплая, основная масса ботинка холодная. Нога ощущает тепло, и теплоотвод через кожу уж во всяком случае не уменьшается. Ботинок начинает прогреваться вглубь, теплоотвод (и теплоподвод) не только не уменьшается, а, может быть, даже увеличивается. В итоге ботинок прогреется полностью. И вы не будете беспокоиться за свои ноги даже на сильном морозе.

Позвольте мне в данном месте повториться, так как я не хочу быть неверно понятым. Мой рецепт состоит в следующем: если вам необходимо обуться на холоде, если у вас нет средств предварительно согреть обувь, если у вас замерзли ноги и негде их согреть, то целесообразно максимально быстро переобуться, слегка подышав в ботинки. Вам станет лучше. На морозе до 30 градусов по Цельсию это проверено.

Подведем итог. А именно, постараемся понять, что мы (может быть, весьма условно) хотим назвать «триггерным эффектом в человеческом организме». Слабый внешний толчок (один выдох) переводит организм (в данном случае — ногу в ботинке) в одно из двух сильно отличающихся друг от друга состояний (отличие это особенно очевидно «хозяину» ноги!). (Заметим, кстати, что ситуация больше напоминает пример с маятником, чем с триггером. При легком толчке маятник переходит из некоторого начального (вертикального) положения в одно из двух устойчивых состояний. Триггер же переходит из одного устойчивого положения в другое. Но название «триггерный эффект» звучит красиво и легко запоминается, отражая при этом главное — наличие двух состояний устойчивого равновесия.)

Можно предположить, что такая «триггерная» реакция организма должна проявляться и в других ситуациях, т. е. достаточно адекватно описывать реакцию человеческого организма на изменение внешних условий.

Если бы я писал, как говорят профессионалы-физики, более строго, то я бы сказал что-нибудь вроде того, что предложена феноменологическая теория поведения организма при некоторых ограничениях на начальные и граничные условия.

Феноменологические теории в науке вполне приемлемы и эффективны. Они позволяют интенсивно продвигаться вперед в научных исследованиях, пока кто-либо не разовьет, как принято говорить, строгую теорию. Для разработки строгой теории нужно время, спокойные условия для работы и, наконец, просто удача.

Обсудим вопрос о соотношении теории и эксперимента. Речь идет о достаточности теории и о достаточности эксперимента. Не следует думать, что я, так сказать, подстилаю себе соломку, чтобы мягче было падать. Дело в том, что на основании аналогии, т. е. феноменологической теории, я собираюсь сделать кое-какие обобщения: я намерен использовать теорию «триггерного эффекта» как инструмент исследования. Однако, мне вновь необходимо небольшое отступление.

В книге Е. Л. Фейнберга «Кибернетика, логика, искусство» имеется место, где он обсуждает поставленный выше вопрос о достаточности теории и эксперимента. Е. Л. Фейнберг указывает, что вопрос о достаточности теории и эксперимента выходит за пределы формальной логики теории, строгой логики оценки результатов эксперимента. Этот вопрос решается всякий раз и каждым конкретным человеком произвольно.

Моя позиция заключается в том, что после принятия решения о достаточности (на определенный момент) теории и эксперимента следует строго зафиксировать условия, при которых принято решение, с тем, чтобы впоследствии можно было бы вернуться к вопросу о достаточности на новой основе, с новыми фактами.

Я склонен сейчас думать, что триггероподобный характер реакции организма на условия — довольно общее свойство человеческого организма. В частности, я имею в виду невралгические боли, которые тем сильнее, чем больше внимания им уделяется. Возможно, эффективнее чем-то отвлечь себя, применить аутотренинг. Второй пример — мышечные судороги при плавании на длинные расстояния. Здесь известен эффективный прием — следует превозмочь себя и кольнуть сведенную судорогой мышцу английской булавкой. Возможно, женские рыдания, которые в конце концов приносят облегчение,— такого же типа явление. И наконец, нервнопсихические расстройства, например астенический синдром. Я — не специалист, и поэтому не могу, точнее, не хочу пускаться в пространные рассуждения по данному предмету. Думаю, однако, что полезно с помощью аналогии с триггером поискать новые средства воздействия на пациента, на которого обрушилась эта болезнь.

Есть еще одна область деятельности человека, на которую мне указал Р. О. Нестеров. Это — проблема одежды для работающих в условиях Крайнего Севера. Возможно, с помощью представлений о триггерных эффектах в организме человека трудности конструирования одежды для Севера можно перенести, так сказать, в иную плоскость, избавиться от привычных представлений и найти новые, оригинальные решения.

(Начало см. на с. 13)

да какие! За один цикл в ОДН записывается одна метка, а в ГЗУ — страница, и в ней может быть хоть миллион меток. То же самое и при считывании. Эта параллельность ввода-вывода информации очевидно роднит ГЗУ с мозгом. Внутри считанной страницы дальнейшая выборка идет последовательно бит за битом — опять же как в мозге.

На этом аналогии, даже совпадения, не кончаются. Голографическая запись характеризуется тем, что волна, отраженная от одной ячейки транспаранта, например от прозрачной «1», воздействует на всю площадь голограммы, т. е. получается, что любой бит «размазывается» по этой площади, подобно тому, как это происходит в мозге. Диаметр голограммы может достигать миллиметра, что в сотни раз больше диаметра лазерной метки в ОДН. Отсюда — повышенная надежность хранения информации в голограммах: незначительные пылинки и даже царапинки им не страшны. На транспарант можно записывать не только черные и белые нули и единицы, но и картины, образы, в том числе и цветные полутоновые. Для голографии могут использоваться фотопластинки с очень толстой эмульсией — запись в ней осуществляется не только на поверхности, но и во всем объеме — вот еще одно приближение к «серому веществу» наших черепных коробок. Все манипуляции с лазерным лучом, переписывание транспаратна, перестройка других элементов осуществляется чисто электронным способом — в устройстве нет механически перемещающихся, трущихся (и, увы, истирающихся) деталей и узлов. Вот еще один, и опять принципиальный, шаг от ОДН к мозгу. Помещая на пути предметного лазерного луча оптические фильтры, линзы, призмы, решетки и т. п., можно осуществлять разнообразную обработку голограмм, обеспечивая, в частности, и ассоциативный поиск.

Совершенные голографические ЗУ пока не созданы, но сообщения о победах этого направления появляются все чаще и чаще. Вот голографический фильтр, позволяющий распознать любой летящий объект, зарегистрированный локатором. Уже давно создан голографический банк изображений, содержащий... отпечатки пальцев всех преступников США. А в Англии начали выпуск денежных чеков, подделка которых исключается благодаря нанесению на них голограммы с портретом Шекспира (неплохое использование классического наследия!). Пока это отдельные штрихи, частности, сложится ли из них принципиально новая голографическая запоминающая и вычислительная техника — покажет будущее.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1306—М1310, Ф1313—Ф1317

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 декабря 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10-91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1306» или «Ф1313». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1306. Назовем вытянутостью прямоугольника отношение большей стороны к меньшей. Докажите, что вытянутость прямоугольника B, вписанного в другой прямоугольник $П$ (так, что вершины B лежат по одной на сторонах $П$), не меньше вытянутости $П$.

И. Акулич

М1307. Докажите, что при любом натуральном n у числа $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ не меньше n различных простых множителей.

Н. Васильев, В. Сендеров

М1308. На плоскости даны три прямые. Найдите множество центров правильных треугольников, вершины которых лежат на данных прямых (по одной на каждой из трех прямых). Исследуйте все случаи взаимного расположения данных прямых.

А. Савин

М1309. На плоскости задан треугольник. Для произвольной точки M плоскости определяется 1-й «залп»: множество $H_1(M)$ из трех точек — середин отрезков, соединяющих M с вершинами треугольника, затем 2-й залп: множество $H_2(M)$ из 9 точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_1(M)$ с вершинами треугольника, и так далее) k-й залп $H_k(M)$ состоит из 3^k точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_{k-1}(M)$ с вершинами треугольника). Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ для данного треугольника можно указать фигуру площади меньше ε такую, что для любой точки M найдется номер $k = k(M, \varepsilon)$, начиная с которого весь «салют» $H_k(M)$, $H_{k+1}(M)$,... не будет выходить за пределы этой фигуры.

А. Белов

М1310*. В соревнованиях участвуют 64 боксера. Ежедневно встречаются 32 пары боксеров (так что каждый проводит один бой). Все боксеры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за 16 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание на каждый день составляется накануне вечером и не меняется в день соревнований.)

А. Анджанс

Ф1313. Шмель может лететь вертикально вверх с максимальной скоростью v_1, а вниз — со скоростью v_2. Считая «силу тяги» шмеля не зависящей от направления полета, а силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости шмеля, определите максимальную скорость полета шмеля под углом α к горизонту.

Б. Корсунский

Задачник „Кванта"

Рис. 1.

Ф1314. Модель дирижабля обдувают в аэродинамической трубе потоком воздуха со скоростью $v=300$ м/с. В точке A (точно по оси) скорость потока обращается в нуль (рис. 1). Найдите температуру воздуха около этой точки. Наружная температура равна $T=300$ К.

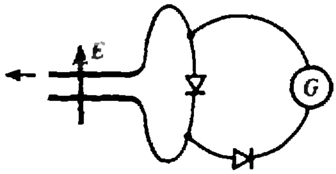


Рис. 2.

Ф1315. Для измерения напряженности (E) электростатического поля в опыте используют плоский конденсатор ($S=100$ см^2, $d=1$ мм), одна из пластин которого неподвижна (рис. 2). Другую пластину периодически с помощью специального механического устройства скачком убирают в сторону, резко уменьшая емкость конденсатора. Считая элементы измерительной цепи (диоды и гальванометр) идеальными, найдите показания гальванометра при $E=1000$ В/см и периоде механических толчков $T=0{,}01$ с. Подумайте, сильно ли зависит ответ от возможной неидеальности диодов и гальванометра.

З. Рафаилов

Ф1316. Полупроводниковый терморезистор имеет зависимость сопротивления от температуры вида $R=R_0(1-\alpha t)$. Когда терморезистор нагрет до температуры t, он рассеивает в окружающую среду мощность $P=B(t-t_{\text{окр}})$. Какой ток будет течь в цепи, если к терморезистору подключить источник с напряжением U?

А. Зильберман

Ф1317. К усилителю низкой частоты подключаем громкоговоритель и микрофон и устанавливаем их на расстоянии 0,5 м друг от друга. Плавно увеличивая усиление, добьемся того, что система «завоет». Оцените частоту звука при этом. Что изменится, если выводы громкоговорителя поменять местами? (Примечание: такой опыт легко проделать при помощи обычного магнитофона.)

Р. Александров

Решения задач

М1281—М1285, Ф1293—Ф1297

М1281. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше 4.

У этой задачи есть много разных решений, использующих простые неравенства для двух положительных чисел:

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$$

и т. п.

Приведем четыре из них, предлагая читателю выбрать самое симпатичное на свой вкус.

1. Условие $ab>a+b$ запишем так:

$$(a-1)(b-1)>1.$$

Обе скобки должны быть положительными (ведь если $0<a<1$ и $0<b<1$, то $(a-1)(b-1)<1$). Тогда, согласно неравенству между средними арифметическим и геометрическим чисел $a-1$ и $b-1$ имеем

$$a-1+b-1\geqslant 2\sqrt{(a-1)(b-1)}>2.$$

Отсюда $a+b>4$.

2. Данное условие эквивалентно тому, что среднее *гармоническое* чисел a и b больше 2:

$$\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}=\frac{2ab}{a+b}>2.$$

Но среднее арифметическое не меньше среднего гармонического:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{2ab}{a+b}\text{, т. к. }(a-b)^2\geqslant 0.$$

Отсюда $a+b>4$.

3. Поделив данное условие на a и на b, получаем

$$a>\frac{a}{b}+1,\quad b>\frac{b}{a}+1,$$

откуда

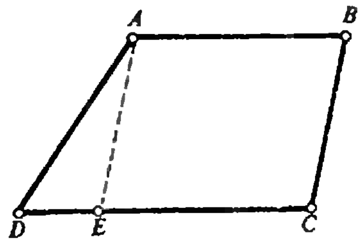
$$a+b>\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geqslant 4.$$

4. Продолжив условие влево очевидным неравенством $\frac{(a+b)^2}{4}\geqslant ab>a+b$, для $S=a+b$ получим $S^2/4>S$, или $S^2>4S$, откуда (поскольку $S>0$) $S>4$.

Н. Васильев

М1282. *Докажите, что не существует двух (отличных от параллелограммов) трапеций таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.*

В любой трапеции разность боковых сторон меньше разности оснований. В самом деле, если E — точка на большем основании CD трапеции $ABCD$ такая, что



$ABCE$ — параллелограмм (см. рисунок), то

$$CD-AB=DE>|AD-AE|.$$

(Последнее неравенство — тот факт, что в треугольнике каждая сторона больше модуля разности двух других — следует из «неравенства треугольника», согласно которому каждая сторона меньше суммы двух других.)

Отсюда следует утверждение задачи.

В. Произволов

М1283. Квадрат 99×99 разбит на фигурки трех типов (рис. 1). а) Докажите, что фигурок первого типа не меньше чем 199.
б) Приведите пример разбиения, когда фигурок первого типа ровно 199.

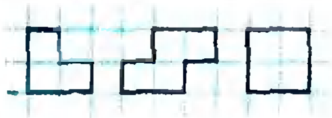


Рис. 1.

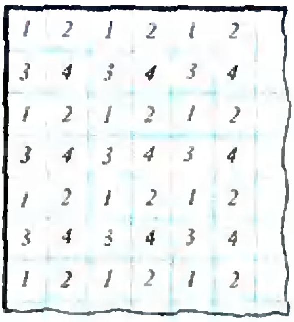


Рис. 2.

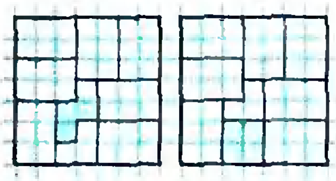


Рис. 3.

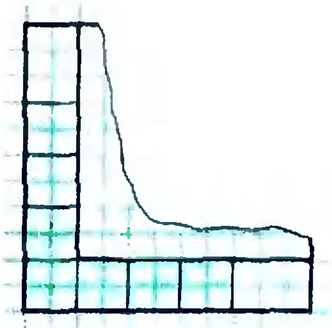


Рис. 4.

а) Докажем, что (для любого $n \geqslant 4$) при заполнении квадрата $(2n-1)\times(2n-1)$ фигурками данных трех типов фигурок 1-го типа — уголков — будет не меньше $4n-1$. В частности, при $n=50$ получим нужную оценку 199.

Раскрасим клетки доски $(2n-1)\times(2n-1)$ в четыре цвета 1, 2, 3, 4, как показано на рисунке 2. Пусть a_i — число уголков, не содержащих клетку цвета i ($i=1, 2, 3, 4$), т. е. содержащих по одной клетке трех других цветов; b — общее число фигурок двух других типов, каждая из которых содержит по одной клетке разных цветов. Поскольку общее число клеток 1-го цвета равно n^2, 2-го, 3-го — по $n(n-1)$ и 4-го — $(n-1)^2$, то

$$a_2+a_3+a_4+b=n^2,$$
$$a_1+a_2+a_4+b=a_1+a_3+a_4+b=n(n-1),$$
$$a_1+a_2+a_3+b=(n-1)^2,$$

откуда

$$a_4-a_1=2n-1, \quad a_3-a_1=a_2-a_1=n$$

и (поскольку $a_1 \geqslant 0$) $a_2=a_3 \geqslant n$, $a_4 \geqslant 2n-1$, так что

$$a_1+a_2+a_3+a_4 \geqslant n+n+2n-1=4n-1.$$

Вот более короткое рассуждение, в котором участвует лишь общее число $a=a_1+a_2+a_3+a_4$ уголков и число b фигурок двух других типов. Поскольку $3a+4b=(2n-1)^2$ и в каждой фигурке содержится не более одной клетки 1-го цвета, то $a+b \geqslant n^2$, поэтому

$$4a \geqslant 4n^2-4b=4n^2-(2n-1)^2+3a=4n-1 \geqslant 3a,$$

откуда

$$a \geqslant 4n-1.$$

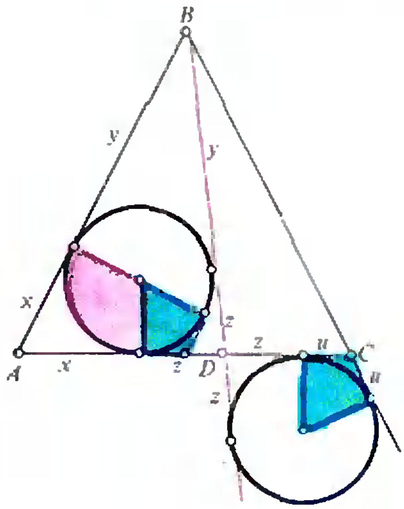
б) На рисунке 3 показано, как можно заполнить квадрат 7×7, используя одну фигурку типа 2 или 3 и $15=4\cdot 4-1$ уголков*, а на рисунке 4 — как можно от заполнения квадрата $(2n-1)\times(2n-1)$ с $4n-1$ уголками перейти к заполнению квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ с $4(n+1)-1=4n+3$ уголками. (Заметим, что из наших оценок в пункте а) следует, что $b=n^2-a_2-a_3-a_4 \leqslant n^2-4n+1$, а это число при $1 \leqslant n < 4$ отрицательно, поэтому заполнение возможно лишь начиная с $n=4$, т. е. с квадрата 7×7.)

Д. Фомин

* Прямоугольник 2×3 очевидным образом разбивается на два уголка.

Задачник „Кванта"

М1284. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник ABD, имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков BC и BD и отрезка CD (вневписанная в треугольник BCD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.



Пользуясь тем, что две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, обозначим их, как показано на рисунке 1 (здесь использовано также, что касательные, проведенные из точки D к каждой из двух равных окружностей, образуют равные углы, поэтому все они равны). Приравнивая две касательные, проведенные из вершины B треугольника к дальней окружности, и учитывая, что $AB=BC=x+y$, получим:

$$y+2z=y+x+u,$$

откуда

$$x+u=2z. \qquad (*)$$

Теперь решение можно закончить рутинной выкладкой, используя выражения площади треугольника через полупериметр p и радиус r вписанного круга, $S=rp$, а также через радиус r_a вневписанного круга, касающего стороны a ($S=(p-a)r_a$): если h — высота, опущенная на боковую сторону треугольника ABC, а r — радиусы равных кругов, то площадь S_{ABC} равна

$$h\cdot\frac{x+u}{2}=S_{ABD}+S_{DBC}=$$
$$=r(x+y+z)+r\left(y+z+\frac{x+u}{2}-z-u\right)=$$
$$=r\left(x+y+\frac{x+u}{2}+y+\frac{x+u}{2}-u\right)=r(2x+2u).$$

Отсюда $r=h/4$.

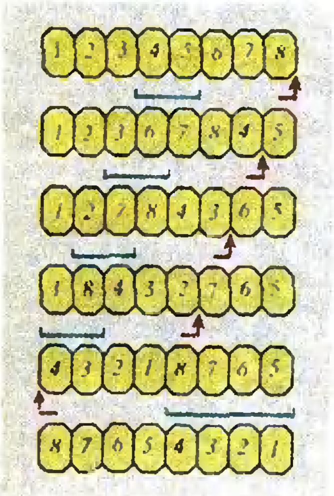
Однако это можно также доказать, используя равенство (*), чисто геометрически. Голубой четырехугольник с вершиной C (см. рисунок) можно приставить к розовому сектору так, что одна из его сторон u ляжет на основание AC треугольника, а другая — поскольку $x+u=2z$ — пойдет по его средней линии, которая, тем самым, касается вписанной в треугольник ABD окружности (один из голубых радиусов совпадает с красным, перпендикулярным основанию, а другой составляет продолжение красного радиуса, перпендикулярного боковой стороне, условие же (*) показывает, что C попадет в середину основания). Отсюда следует, что диаметр окружности $2r$ равен половине высоты h.

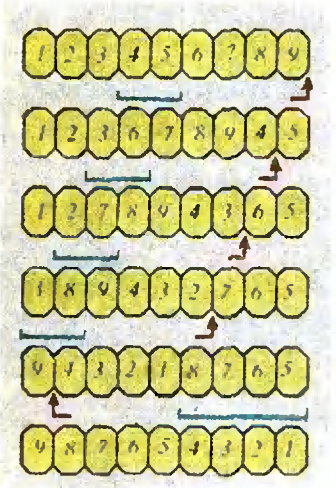
И. Шарыгин, Н. Васильев

М1285. Имеется колода из n карт, сложенных по порядку: 1, 2, 3, ..., n. Разрешается взять подряд несколько карт и, не меняя порядка, вставить их в любое другое место колоды (можно в начало или в конец). Пусть $M(n)$ — наименьшее число таких операций, необходимое, чтобы

Примеры на рисунках показывают, что для перекладывания $n=8$ и $n=9$ карт достаточно $s=5$ шагов (операций). Точно так же для любого n достаточно $s=[n/2]+1$ шагов (т. е. $s=(n+1)/2$ для нечетного и $s=n/2+1$ для четного n). Ниже мы докажем, что это число — наименьшее возможное.

Легче доказать оценку $s\geqslant(n-1)/3$, в частности, что $s\geqslant17$ для $n=52$ карт. Будем считать, что между соседними картами в исходном порядке 1, 2, ..., n имеется «связь». Ясно, что при каждой операции разрушаются не более чем 3 связи: если мы выбираем отрезок b, ..., c из *сложить карты в обратном порядке. Докажите, что а) $M(9)\leqslant 5$, б) $M(52)\leqslant 27$, в)*$M(52)\geqslant 17$, г)*$M(52)\geqslant 27$. Найдите $M(n)$ для любого $n>2$.*





Ф1293. *Цилиндрический сосуд с легким и тонким приставным дном, плотно прилегающим к стенкам сосуда, опущен в воду так, что дно находится на глубине $H=4$ см, и удерживается неподвижно (см. рисунок). Гирю какой минимальной массы и куда надо поставить на дно, чтобы*

Задачник „Кванта"

ряда ..., a, b, ..., c, d, ... и вставляем его между p и q, то разрушаются связи ab, cd и pq. Чтобы переложить карты в обратном порядке, нужно разрушить все $n-1$ связей. Отсюда для числа необходимых шагов s получаем оценку

$$3s\geqslant n-1.$$

Чтобы получить оценку $s\geqslant(n+1)/2$, будем рассуждать несколько иначе. Будем считать, что между соседними картами возможны связи двух типов: „$>$" или „$<$" («больше» или «меньше»), и за s операций все $n-1$ связи типа „$<$" должны превратиться в противоположные „$>$". Заметим, что на каждом шаге число связей „$>$" может возрасти не более чем на 2. В самом деле, сразу 3 связи „$<$" превратиться в „$>$" могли бы только при переходе от

$$...a,\ b,\ ...,\ c,\ d,\ ...,\ p,\ q,...$$

к

$$...a,\ d,\ ...,\ p,\ b,\ ...,\ c,\ q,...$$

в том случае, если

$$a<b,\ c<d,\ p<q,\ a>d,\ p>b,\ c>q.$$

Но эти шесть неравенств несовместимы: из них следует

$$a<b<p<q<c<d<a \text{ — противоречие.}$$

Далее, на первом шаге может превратиться из „$<$" в „$>$" лишь одна связь: ведь здесь либо $a<b<c<d<p<q$, либо $p<q<a<b<c<d$, а при этом выполняется лишь одно из трех неравенств

$$a>d,\ p>b,\ c>q.$$

Точно так же обстоит дело и на последнем шаге, после которого получается набор из $n-1$ связей „$>$" (вообще нетрудно видеть, что обратные переходы совершенно аналогичны прямым, лишь знаки „$<$" и „$>$" меняются ролями).

Итак, для числа s необходимых шагов получаем оценку

$$1+2(s-2)+1\geqslant n-1,$$

откуда

$$s\geqslant(n+1)/2.$$

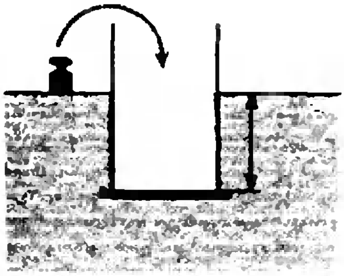
С. Воронин

Гирю нужно поставить как можно ближе к стенке сосуда — при этом необходимая для отрыва дна масса будет минимальной.

Будем считать приставное дно жестким. Тогда сила, с которой дно давит снизу на сосуд (а значит, и сила, действующая со стороны сосуда на дно), будет приложена в точке касания с противоположной от гири стороны. Запишем уравнение моментов относительно этой точки:

$$\varrho gH\frac{\pi D^2}{4}\frac{D}{2}=mgD,$$

оно отвалилось? Диаметр дна $D=10$ см, размеры гири считать малыми по сравнению с диаметром сосуда.



или

$$m=\frac{\pi}{8}\rho HD^2=157 \text{ г.}$$

Это составит ровно половину массы вытесненной воды. Как только дно перестанет давить снизу на цилиндр и образуется небольшая щель — в нее войдет вода и дно отвалится.

Нужно сказать, что ответ сильно зависит от того, как «устроен» контакт дна с цилиндром — наша модель взаимодействия не единственная.

А. Зильберман

***Ф1294.** Одна сторона тонкой металлической пластинки освещена Солнцем. При температуре воздуха T_0 освещенная сторона имеет температуру T_1, противоположная — T_2. Какими будут значения температур, если взять пластинку двойной толщины?*

Тепло излучается каждой стороной пластинки. Полная отдаваемая мощность составляет

$$W=a(T_1-T_0)+a(T_2-T_0)$$

(a — коэффициент пропорциональности). Такую же мощность пластинка получает от Солнца. Для пластинки вдвое большей толщины получим

$$W'=a(T_3-T_0)+a(T_4-T_0).$$

При тепловом равновесии поток тепла распространяется от освещенной стороны к противоположной так, что через любое поперечное сечение пластинки поток тепла одинаков и равен потоку, уносимому воздухом с неосвещенной стороны, т. е.

$$a(T_2-T_0)=k\frac{T_1-T_2}{d}$$

(k — коэффициент пропорциональности, d — толщина пластинки). Для пластинки двойной толщины —

$$a\,(T_4-T_0)=k\frac{T_3-T_4}{2d}.$$

После простых преобразований находим

$$T_3=T_0+(T_1+T_2-2T_0)(2T_1-T_2-T_0)/(2(T_1-T_0)),$$
$$T_4=T_0+(T_2-T_0)(T_1+T_2-2T_0)/(2(T_1-T_0)).$$

Е. Пономарёв

***Ф1295.** К точкам А и Б подключена многозвенная резисторная цепь (см. рисунок). Каждое звено содержит два одинаковых резистора, сопротивления резисторов каждого следующего звена в два раза больше предыдущего. Каким будет сопротивление*

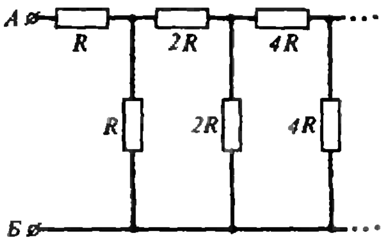
Обозначим искомое сопротивление R_x. Если мы отбросим первое звено, то оставшаяся цепочка будет очень похожа на исходную, только все значения сопротивлений в ней будут увеличены в 2 раза. Это означает, что сопротивление ее равно $2R_x$. Теперь можно записать:

$$R_x=R+\frac{R\cdot 2R_x}{R+2R_x},$$

или

$$2R_x^2-3RR_x-R^2=0.$$

между точками А и Б при очень большом числе звеньев? Резисторы в первом звене имеют сопротивление R.



Задачник „Кванта"

Отсюда получаем

$$R_x = R\frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}78R.$$

Нужно сказать, что при таком выборе чисел в задаче — возрастание сопротивлений в ячейках в 2 раза — вклад последующих ячеек очень быстро убывает, и приближенный (довольно точный!) ответ можно получить уже при 3—4 ячейках. При возрастании сопротивлений в большее число раз приближенный ответ будет еще точнее. Если же изменить условие — сделать так, чтобы сопротивления звеньев уменьшались, хотя бы даже в 2 раза, точность приближенного метода сильно ухудшится.

А. Зильберман

***Ф1296.** В контуре LC происходят колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе U, а ток через катушку I, замыкают ключ K, присоединяя параллельно контуру цепь, состоящую из параллельно соединенных резистора сопротивлением R и катушки индуктивностью 2L (рис. 1). Определите полное количество теплоты, которое выделится в резисторе.*

Катушки включены параллельно, поэтому напряжения, изменяющие токи в катушках после замыкания ключа, одинаковы, а изменения токов в катушках обратно пропорциональны величинам индуктивностей катушек:

$$\frac{I-I_x}{I_x} = \frac{2L}{L} = 2, \qquad (1)$$

где I_x — ток в каждой катушке к моменту окончания колебаний в контуре (рис. 2).

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{2L+L}{2}I_x^2 + Q, \qquad (2)$$

где Q — искомое количество теплоты, выделившееся на резисторе.

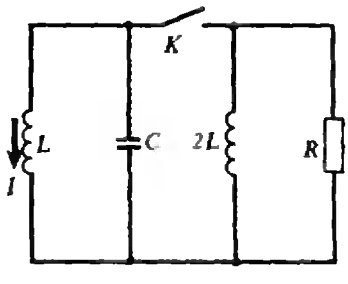


Рис. 1.

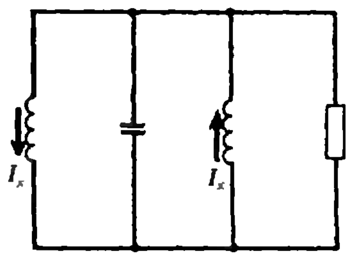


Рис. 2.

Из уравнений (1) и (2) находим

$$Q = \frac{1}{2}\left(CU^2 + \frac{2L^2}{3L}I^2\right) = \frac{1}{2}\left(CU^2 + \frac{2L}{3}I^2\right).$$

О. Савченко

Задачник „Кванта"

Ф1297. Параллельно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F движется точечный источник света. На каком расстоянии от линзы он окажется в тот момент, когда скорость изображения его в линзе будет равна по величине скорости источника? Расстояние от главной оптической оси линзы до источника $H=F/4$.

Обозначив расстояние от источника до линзы через d, а расстояние от линзы до изображения через f, запишем формулу линзы:

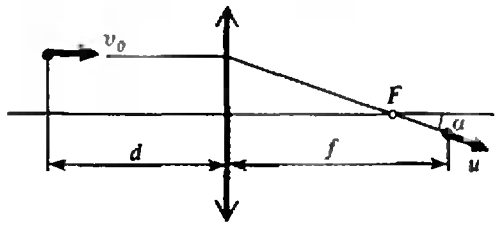
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

За очень малый промежуток времени Δt расстояние от источника до линзы уменьшится на $\Delta d=v_0\Delta t$, а от линзы до изображения — увеличится на $\Delta f=u\cos\alpha\times\times\Delta t$. Тогда (см. рисунок)

$$\frac{1}{d-v_0\Delta t}+\frac{1}{f+u\cos\alpha\cdot\Delta t}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f},$$

или

$$\frac{v_0\Delta t}{d^2}=\frac{u\cos\alpha\cdot\Delta t}{f^2}.$$



Скорость изображения u равна скорости источника v_0 при $f_1=d_1\sqrt{\cos\alpha}$. Учитывая, что $\cos\alpha=F/\sqrt{F^2+H^2}$, получаем

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1\sqrt{\cos\alpha}}=\frac{1}{F},$$

$$d_1=F\left(1+\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)=F\left(1+\sqrt[4]{1+H^2/F^2}\right)=$$

$$=F\left(1+\frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right).$$

А. Зильберман

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1262—М1275, Ф1268—Ф1282, справились с задачами М1263, М1268, М1269, М1271. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

М. Абдуллаев (Баку) 66; *Ф. Абдуллаев* (Баку) 66; *Ю. Алексеенко* (Киев) 62, 64—66, 72—75; *А. Алиев* (Баку) 66; *Д. Антипов* (Киев) 62; *А. Асанов* (Чиликский р-н Алма-Атинской обл.) 62; *А. Ахмедов* (Баку) 62, 65, 66; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 62, 65, 66, 72—75; *Е. Беркович* (Киев) 62; *Л. Беркович* (Киев) 62; *А. Бородин* (Донецк) 62, 64—67, 72—75; *В. Бринюк*

Задачник „Кванта"

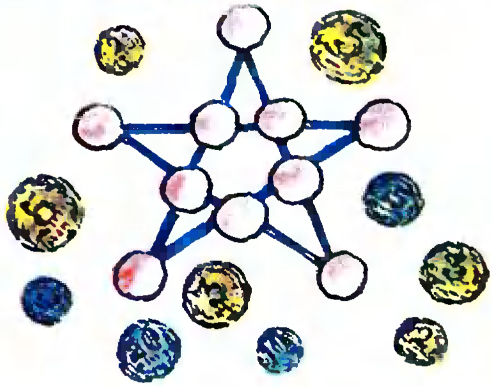
(Донецк) 62, 64—67, 72—75; *О. Бурд* (Киев) 62, 66, 72, 74, 75; *П. Бусоргин* (Нолинск) 62, 65; *И. Бушмакин* (Евпатория) 62; *О. Ваисов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 62, 72; *Б. Вайнер* (Киев) 62, 65—67, 72, 74, 75; *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) 62; *Э. Вийсаллы* (Баку) 62; *И. Винарчук* (Киев) 75; *Т. Вовкивский* (Черновцы) 62, 66, 72; *М. Волошина* (Москва) 62, 65, 74; *М. Воронецкая* (Ижевск) 66, 67, 72, 74, 75; *С. Гавриленко* (Гомель) 62; *О. Гайдай* (Львов) 62, 72, 74; *В. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 62; *С. Гетун* (Киев) 62; 64—66, 72—75; *Ю. Гордон* (С.-Петербург) 62, 72; *Ю. Горенбургов* (С.-Петербург) 66, 72—75; *А. Гревцев* (Москва) 62; *П. Григорьев* (Самара) 66; *А. Давыдов* (с. Елфимово Нижегородской обл.) 62, 74; *А. Джиоев* (Владикавказ) 62; *И. Доманов* (Донецк) 62; *Д. Дудко* (Киев) 62, 64—66, 74, 75; *Г. Дудьева* (Донецк) 62, 66, 72, 74; *А. Жуков* (Воронеж) 62; *Д. Жумабоев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 72; *Ж. Жумадинов* (Алма-Ата) 62, 72, 73; *А. Жученко* (Донецк) 66, 74; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 62, 64—66; *Л. Зайцева* (Киев) 62; *В. Замятин* (Киров) 72, 74; *А. Зимин* (Иваново) 62; *П. Зингершохер* (С.-Петербург) 72, 74, 75; *С. Зиновьев* (Харьков) 62, 66; *И. Изместьев* (пгт Суна Кировской обл.) 62, 65—67, 72, 74; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 65—67, 72—74; *Н. Исабаев* (Алма-Ата) 72, 73; *Г. Исабеков* (Алма-Ата) 72; *К. Исамбаев* (Алма-Ата) 62; *Х. Исламов* (Баку) 66; *Р. Исмаилов* (С.-Петербург) 62, 65, 72—75; *В. Казанцева* (Ижевск) 66, 74, 75; *Т. Карнаух* (Киев) 62, 65, 66, 72—75; *С. Климов* (Ижевск) 62, 64—67, 72—75; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) 72; *П. Кожевников* (Калуга) 62, 64—67, 73—75; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 62, 65—67, 72, 74; *Е. Кошлякова* (Владикавказ) 62; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 66, 74; *С. Кузьмич* (Минск) 62, 64—67, 72—75; *В. Кулагин* (Харьков) 62, 65, 66; *И. Курляндчик* (С.-Петербург) 72—75; *Я. Лавренюк* (Киев) 62, 64—66, 72—75; *В. Лауринавичюс* (Кайшядорис) 62, 65; *И. Левин* (Москва) 62, 72, 74; *Н. Лисицын* (Ижевск) 62, 64—67, 72, 74, 75; *В. Луговской* (Черкассы) 66, 67, 72, 74, 75; *Э. Магеррамов* (Баку) 62, 66; *А. Малдаханов* (Новосибирск) 74; *Е. Малеко* (Нефтекамск) 62; *Т. Малышкина* (Владивосток) 72; *С. Марков* (Ижевск) 62, 64—67, 72—75; *Д. Мартынов* (Нижний Новгород) 62; *Е. Масков* (Владикавказ) 62; *А. Мирошников* (Владикавказ) 62; *К. Мишачев* (Липецк) 62, 65—67; *М. Мокляк* (Кременчуг) 62, 64, 66, 72, 74, 75; *А. Молдахинов* (Актюбинск) 62; *Э. Насиров* (Баку) 66; *Б. Насыпанный* (Гайворон) 62, 64, 66, 67; *О. Науменко* (Фрязино) 62, 66; *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) 72, 74; *С. Павличков* (Евпатория) 62, 64—66; *Д. Панов* (Москва) 62, 64—66, 72, 74, 75; *Е. Перельман* (С.-Петербург) 65, 66, 72—75; *А. Петросян* (Ереван) 62, 67, 72—75; *В. Пиковский* (Киев) 62, 64, 66, 72—75; *Е. Подзе* (Винница) 74; *Ю. Полонский* (Витебск) 62, 65—67, 72—75; *О. Потапов* (Москва) 74; *Н. Пошевенчук* (Пинск) 72; *О. Пушин* (С.-Петербург) 62, 65, 66; *Д. Рабинович* (Харьков) 62; *А. Рассказов* (Хабаровск) 62; *К. Рахимов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 62, 72; *Д. Рекалов* (Киев) 62, 65, 66; *Ф. Рзаев* (п. Борадыгях АзССР) 62; *А. Руденко* (Киев) 62, 64—66; *А. Рымов* (Талды-Курган) 66, 72, 74; *З. Сабиров* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 62, 72; *Н. Сабурова* (Архангельск) 62; *Ю. Савицкий* (Донецк) 66, 74; *С. Сагадатов* (Уфа) 72; *Садыков* (Андижан) 62; *А. Сарсембаев* (Алма-Ата) 66, 72, 74; *В. Севриновский* (Москва) 67, 74; *Я. Семенович* (Ташкент) 62, 64; *С. Сикорский* (с. Вузловое Львовской обл.) 72; *О. Синица* (Владивосток) 62, 72, 73, 75; *Г. Сироткин* (Харьков) 62, 64—66; *А. Солодушкин* (Томск) 62, 66, 72—74; *С. Срымов* (Алма-Ата) 62; *Д. Старовойтов* (Гомель) 62; *А. Суров* (Москва) 72, 75; *А. Таратин* (Северодвинск) 62, 66, 72; *А. Тлеубаев* (Алма-Ата) 62; *М. Тройников* (Ижевск) 62, 66, 67, 72, 74; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) 73, 74; *Е. Турчин* (Днепропетровск) 66, 72—74; *К. Удод* (Донецк) 66, 74; *А. Уханов* (Евпатория) 66, 72, 74, 75; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 65—67, 72—75; *Д. Филевич* (с. Яструбичи Львовской обл.) 62, 65, 72, 74; *У. Хаджаев* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 62; *Д. Хайкис* (Ижевск) 62, 64—67, 72, 74, 75; *Е. Хасанов* (Хорезмская обл.) 62; *М. Хасин* (Донецк) 62, 64—67, 72—75; *К. Хвенкин* (Минск) 62, 64, 66, 67, 72—75; *Р. Ходжаниязов* (Хорезмская обл.) 62; *Ю. Ходзинский* (Киев) 62, 66, 72, 74, 75; *А. Худяков* (Витебск) 62, 65; *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 62, 65, 67; *В. Шейко* (Минск) 66; *Н. Шкардюк* (Пинск) 62; *Д. Шкляров* (Харьков) 66; *О. Шпырко* (Киев) 72, 74; *Е. Яворская* (Пинск) 72; *В. Яковский* (Харьков) 62, 66, 67.

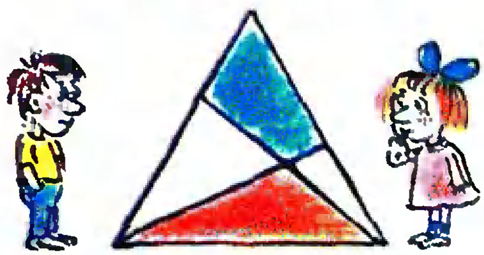
Физика

Р. Авезов (Ургенч) 73; *Е. Аксенова* (С.-Петербург) 69, 73; *М. Аллаберганов* (Ургенч) 73; *Д. Антипов* (Киев) 68, 69, 73, 78—80; *Д. Апальков* (Харьков) 73, 74, 77—81; *Г. Арутюнян* (Ереван) 78, 80; *А. Ахметбеков* (Алма-Ата) 78; *Я. Бабкин* (Киев) 69, 73, 78—80; *С. Базылько* (Северодвинск) 69, 74; *Д. Белобрагин* (Тула) 80; *К. Блиох* (Харьков) 73, 76, 77; *Д. Боднарь* (Винница) 78, 79; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 78, 80, 82; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 78; *С. Булавенко* (Белая Церковь) 78, 79; *Е. Буривцов* (Уфа) 80; *В. Быцюк* (Мамоновка Черкасской обл.) 78, 80; *С. Васильев* (Горловка) 69, 70, 73, 78; *О. Весельева* (Старооскольский р-н Белгородской обл.) 73; *А. Ветров* (Северодвинск) 78; *М. Волович* (Москва) 73; *М. Волошина* (Москва) 78, 79; *П. Волынец* (Брест) 74, 78, 79; *И. Воскобойник* (Киев) 68, 69, 73, 74, 77, 78, 80; *А. Вылугин* (Донецк) 69, 78, 80, 81; *А. Гаврилов* (Алма-Ата) 78, 80; *О. Гайдай* (Львов) 78; *А. Галанин*

Задачник „Кванта"

(Сергиев Посад) 73, 74, 77—80, 82; *А. Гаппоха* (Киев) 78, 79, 82; *П. Гвоздев* (Котельнич) 69, 78, 79; *А. Георгадзе* (Нальчик) 78—80; *В. Глазков* (Коломна) 74, 78—80; *С. Гогин* (Осиповичи) 69, 78, 80; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 69, 73, 78, 80, 82; *А. Гревзев* (Москва) 78—81; *Т. Григорян* (Ереван) 74, 78, 79; *Ю. Гройсман* (Ташкент) 78—80; *Н. Гуляев* (Н. Новгород) 68—82; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 78—80, 82; *А. Денисов* (Могилев) 69, 74, 77; *С. Дубров* (Киев) 68, 69, 73, 74, 77, 78, 82; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 69, 78, 80; *О. Дымар* (Каменец) 69; *М. Дьяк* (Владимир) 69, 70; *Ю. Егоров* (Авдеевка) 70, 73; *А. Ельников* (Донецк) 69, 74, 77—80; *А. Ермошко* (Орша) 78, 80; *А. Ефимов* (Алма-Ата) 78, 80; *Н. Ефремов* (Екатеринбург) 69, 73, 74, 78, 79; *С. Жак* (Тернополь) 68, 70, 73, 76, 78, 80; *В. Железняков* (Вольск) 78, 80; *А. Жуков* (Воронеж) 70; *В. Жукова* (Кузнецовск) 69; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 69, 73—75, 78, 80; *М. Заболотный* (Винница) 69, 73—75; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 73, 75, 77; *А. Зайцев* (Железногорск) 68—72; *С. Замобовский* (Винница) 69, 73—75; *С. Занкович* (Николаев) 70, 73—75, 77, 78, 80; *А. Земляков* (Ростов) 69; *И. Зозуля* (Одесса) 69, 73, 74, 78—80; *М. А. Иванов* (Тула) 68—74, 77; *М. Г. Иванов* (Тула) 68—70, 73, 74; *Е. Иванова* (Канев) 69, 70, 73, 74, 76, 78—80; *С. Ивленков* (Тольятти) 78, 79; *Н. Ивченко* (Киев) 69, 70, 72—74, 76—82; *М. Игнатьев* (Северодвинск) 68, 78, 80; *М. Ильин* (Владимир) 76; *Б. Иманов* (Алма-Ата) 78; *Ш. Исмаилов* (Ургенч) 80; *Д. Кайрыев* (с. Гульча Ошской обл.) 77—79; *В. Каленский* (Ташкент) 79; *Д. Калинин* (Тамбов) 78; *Г. Каминский* (Киев) 69; *Ч. Камчибеков* (Арзамас) 78, 79; *И. Катеринчук* (Городок Хмельницкой обл.) 78, 80; *Н. Keберле* (Запорожье) 73, 79, 80; *Н. Клембовский* (Николаев) 70, 73—75, 77, 78, 80; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 69, 73, 78, 80, 82; *М. Коваленко* (Симферополь) 69; *С. Коваль* (Гомель) 73, 77; *В. Кожевников* (Североморск) 74, 78—80; *К. Кожухов* (Кузнецовск) 78, 79; *В. Козлов* (Старый Оскол) 69, 73, 74, 77—81; *Т. Колесникова* (Вишневое) 80; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 69, 70, 72; *Д. Комиссаров* (Арзамас) 68—70, 73, 78; *В. Коновалов* (Старый Оскол) 78, 80; *П. Корешков* (Черкассы) 73, 75, 78—80; *А. Король* (Брест) 74, 78, 80; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 72; *Д. Кример* (Брест) 78, 80; *С. Кузьменко* (Киев) 69, 72; *С. Кук* (Николаев) 69; *Ю. Кулик* (Канев) 69, 70, 73, 74, 78—80; *У. Курязов* (Шават) 78; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 69, 70, 73—75; *В. Лель* (Усть-Каменогорск) 78, 80; *В. Линев* (Скопин) 78, 79; *И. Линчевский* (Брест) 80; *Э. Локшин* (п. Черноголовка Московской обл.) 69; *С. Любко* (Мукачево) 73; *К. Мазюкевич* (Кузнецовск) 73, 78, 80; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 69, 78, 80; *И. Малеванный* (Тверь) 73, 75, 77; *Ю. Маравин* (Евпатория) 69, 70, 72—76, 78—80; *А. Матрунич* (Ужгород) 69, 70, 73—75, 77—80, 82; *М. Махмудов* (Исфара) 78, 80; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 73, 75, 78—80, 82; *В. Меркер* (Старый Оскол) 78, 80; *В. Мушик* (Кузнецовск) 69, 78, 80; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 78, 80; *А. Нежуренко* (Киев) 68—70, 73, 74, 77—80, 82; *М. Немировский* (Одесса) 68, 73; *Д. Немировский* (Черкассы) 79, 82; *В. Нукова* (Кузнецовск) 78, 80; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 68—70, 72, 74—76, 78—80; *И. Олимов* (Ходжент) 78, 80; *А. Ольховец* (Киев) 68—70, 73, 75, 77—80, 82; *Р. Онишенко* (Минск) 68—70, 73, 77; *Д. Островский* (С.-Петербург) 73, 77—81; *Х. Отоженов* (Ургенч) 78, 80; *М. Охрименко* (Черкассы) 78, 80; *Д. Пастухов* (Витебск) 68—75, 77, 78, 80—82; *Д. Петрайтис* (Вольск) 69, 70, 73, 74, 77, 78, 80; *В. Писляков* (Тверь) 68, 75, 78, 80; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 75, 76, 78; *М. Плетюхов* (Брест) 73, 77; *Ю. Полищук* (с. Птичья Ровенской обл.) 69, 70; *С. Польшин* (Харьков) 70—74, 76, 77; *В. Попов* (Жуковский) 78, 80; *А. Поташник* (Киев) 78, 80; *Д. Потишко* (Харьков) 73—78, 80, 82; *С. Рассадин* (Минск) 69, 70, 77; *Д. Розметов* (Ургенч) 73; *Е. Рослый* (Омск) 78, 80; *Ш. Рузметов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) 78; *В. Рыбачук* (Виница) 75, 78, 79; *В. Рылов* (Свободный) 73, 74, 76, 77; *А. Свириденков* (Троицк Московской обл.) 78; *К. Селтнепесов* (Ашхабад) 73, 74, 78, 80; *В. Сергиенко* (Брест) 78—80; *В. Сиско* (Таллинн) 78, 80; *Д. Скотников* (Владимир) 69, 70; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 78, 80; *А. Снежко* (Киев) 69; *А. Соклаков* (Брест) 69, 77, 78, 80; *О. Сорока* (с. Верба Ровенской обл.) 69; *А. Стельмах* (Киев) 68, 69; *А. Столповская* (Днепрорудный) 68—70, 73, 77; *В. Сусиков* (Брест) 80; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 73, 75—77; *А. Таратин* (Северодвинск) 78, 80; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 79; *А. Терентьев* (Канаш) 78—80; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 74, 78—80; *М. Тищенко* (Старый Оскол) 78; *В. Толпекин* (Одесса) 68, 78—80; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 77; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 69—72, 77; *С. Тумача* (Киев) 73, 77, 78, 80; *А. Тумашевский* (Северодвинск) 68; *А. Файзуллаев* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 78; *Д. Федорец* (Харьков) 68, 69, 72, 74, 80; *Д. Хаимов* (Баку) 73; *А. Хацкевич* (Брест) 78; *Д. Холмов* (Баку) 69; *О. Цыбульский* (Одесса) 77; *А. Чистый* (Брест) 69, 70, 73, 74, 77—80; *Д. Чичкан* (Барановичи) 74, 76, 78—80; *Е. Шабловский* (Могилев) 78; *А. Шилков* (Пермь) 74, 77, 78, 80; *И. Шимонис* (Норюнай; Литва) 78, 80; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 78, 80; *А. Шпагин* (Мариуполь) 68, 69, 73, 78—80, 82; *О. Шпырко* (Киев) 68, 69, 72—74, 76—80, 82; *И. Шуляк* (Киев) 69, 70; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 68—70, 72—74, 76—80, 82; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 69, 78, 80; *Д. Юдин* (Самара) 68, 70, 73, 74, 78, 79; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 73, 78, 80, 82; *А. Ямилов* (Донецк) 78—80; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 69, 78, 80, 82; *С. Ячунов* (Ростов) 74.





Задачи

1. В большой и дружной семье все мужчины носят одну фамилию, и разница в возрасте между любым отцом и сыном составляет 22 года. Правнука зовут Игорь Петрович. Его деда зовут Митрофан Тимофеевич. Как звали в детстве главу семьи и сколько ему лет, если Сереже — сыну Игоря, исполнилось 3 года?

2. Найдите все числа, равные утроенной сумме своих цифр.

3. Имеется 10 монет: 2 по 2 копейки, 2 по 3 копейки, два пятака, два гривенника, один пятиалтынный и один двугривенный. Разместите их в кружках звезды (см. рисунок) так, чтобы сумма номиналов на каждой из пяти прямых была одна и та же.

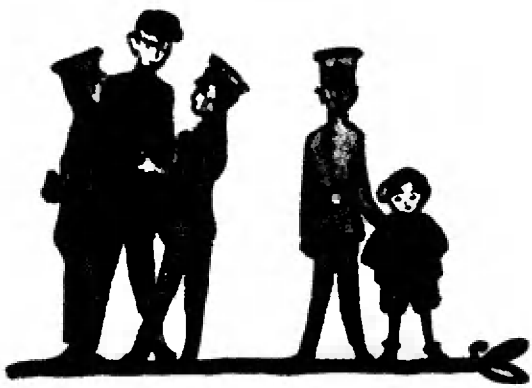
4. Вот уже много лет барон Мюнхгаузен ежедневно ходит к озеру охотиться на уток. Начиная с 1 августа 1991 года он каждый день говорит своему повару: «Сегодня я подбил уток больше, чем два дня назад, но меньше, чем неделю назад». Какое наибольшее число дней барон может произносить эту фразу? (Не забывайте, что Мюнхгаузен никогда не лжет.)

5. Два луча, выпущенные из вершин при основании равностороннего треугольника, разрезали его на четыре части (см. рисунок). При этом оказалось, что площадь красного треугольника равняется площади синего четырехугольника. Найдите угол между этими лучами.

Эти задачи нам предложили В. Тараканов, В. Попов, Ф. Назаров, А. Кимарцев и В. Произволов.

ЛИТЕРАТУРНО-ХУДОЖЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

И. АКУЛИЧ



Это особый класс задач различной сложности и на различные темы. Роднит их лишь одно: происхождение. Их ставят перед читателями авторы некоторых романов, повестей и рассказов, как правило — между делом, зачастую сами не обращая на это внимания. Но если читатель — любитель математики, от него такая задача не ускользнет! Он не упустит случая разобраться, что это там предложил писатель: разрешима задача или нет, сколько решений, можно ли обобщить и т. п.

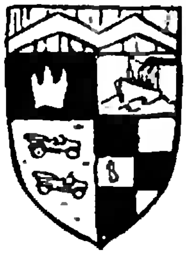
Иногда автор бывает столь любезен, что вместе с условием приводит и решение (как, например, широко известная задача про топоры и пилы из повести Н. Носова «Витя Малеев в школе и дома»). Но это явление редкое. Чаще всего дается лишь условие, да и то... Впрочем, перейдем лучше к конкретным примерам.

Задача 1. *Из двух городов выезжают по одному направлению два путешественника, первый позади второго. Проехав число дней, равное сумме чисел верст, проезжаемых ими в день, они съезжаются и узнают, что второй проехал 525 верст. Расстояние между городами — 175 верст. Сколько верст в день проезжает каждый?*

Л. Кассиль.
Кондуит и Швамбрания. Книга вторая, глава «Задача с путешественниками».

Очень симпатичная задача. Ее можно было бы использовать даже на вступительных экзаменах в нынешние вузы. Решите ее. Если не сумеете, посмотрите ответ в конце номера.

Итак, читатель убедился, что первая из рассмотренных задач имеет вполне строгое и притом единственное решение. Но так бывает далеко не всегда.

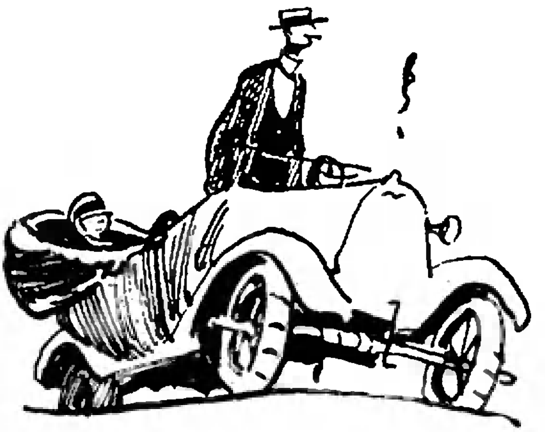


Чаще всего приходится вносить в обнаруженную задачу те или иные корректировки. Вот пример.

Задача 2. *Потом отец Федор подошел к комоду и вынул из конфетной коробки 50 рублей трехрублевками и пятирублевками. В коробке оставалось еще 20 рублей.*

И. Ильф, Е. Петров.
Двенадцать стульев. Глава III.

Здесь даже не сформулирован вопрос, но он напрашивается сам собой: сколько трех- и пятирублевок отец Федор взял и сколько оставил (если, конечно, денежных знаков иного достоинства в коробке не было)? Ну, а чтобы обеспечить единственность ре-



шения, добавим дополнительное условие: отец Федор взял с собой бо́льшую часть трехрублевок и бо́льшую часть пятирублевок. Как ни странно, этого вполне достаточно. А теперь найдите решение.

Следует отметить, что Ильф и Петров оказались весьма щедрыми на задачи. Вот еще одна.

Задача 3. *На трех станциях: Воробьево, Грачево и Дроздово было по равному количеству служащих. На станции Дроздово было комсомольцев в 6 раз меньше, чем на двух других, вместе взятых, а на станции Воробьево партийцев было на 12 человек больше, чем на станции Грачево. Но на этой последней беспартийных было на 6 человек больше, чем на первых двух. Сколько служащих было на каждой станции и какова там была партийная и комсомольская прослойка?*

И. Ильф, Е. Петров.
Золотой теленок. Глава IX.

И эта задача требует дополнительного условия, иначе решение не будет единственным. Давайте сформулируем его в виде вопроса: какое наименьшее число служащих на каждой станции надо задать, чтобы задача получила единственное решение? Найдите сперва это число, а затем, задавшись им, решите и саму задачу.

Задача 4. *Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 28, знаменатель равен $^9/_2$, третий член в $^3/_2$ раза больше знаменателя. Найти четвертый член.*

Г. Белых, Л. Пантелеев.
Республика Шкид.
Глава «Шкида влюбляется».

Шкидец Воробей с этой задачей не справился. И не мудрено: условие ее содержит противоречия. Чтобы привести ее к разрешимому виду, придется сделать два уточнения. Во-первых, будем считать, что одно из трех данных чисел задано неверно. Второе уточнение почуднее: третий член прогрессии в точности равен сумме в рублях, которую автор этой статьи заплатил недавно на рынке за картошку.

Вот теперь задача стала разрешимой. Итак, найдите четвертый член.

Задача 5. *Вот как звучит бой марсианского барабана:*
«Дрянь-дребедень-дребедень-дребедень,
Дрянь-дребедень-дребедень,
Дрянь-дребедень,
Дрянь-дребедень,
Дрянь-дребедень-дребедень».

Курт Воннегут.
Сирены Титана.
Глава четвертая.

Что ж, звук приятный, но где задача? Дребедень какая-то... Но представим себе, что «дрянь» и «дребедень» — некоторые цифры, причем «дрянь» не равна «дребедени». Тогда каждая процитированная строчка представляет собой зашифрованную запись какого-то числа. Пусть одно из этих чисел делится на сумму двух других. А теперь скажите: что больше — «дрянь» или «дребедень»?

Здесь для удобства имеет смысл обозначить: «дрянь»$=A$, «дребедень»$=B$. Тогда мы имеем дело с пятью числами: $\overline{ABBB}=1000A+$ $+111B$, $\overline{ABB}=100A+11B$ (2 шт.) и $\overline{AB}=10A+B$ (2 шт.) Правда, неясно, какое из них делится на сумму двух других (и каких именно), но эта трудность преодолима. Дело в том, что... нет, решайте-ка дальше сами.

И в заключение — едва ли не самая удивительная задача.

Задача 6. *Стоит четырехэтажный дом, в каждом этаже по восьми окон, на крыше — два слуховых окна и две трубы, в каждом этаже по два квартиранта. В каком году умерла у швейцара бабушка?*

Я. Гашек.
Похождения бравого солдата Швейка.
Часть первая, глава III.

Эта задача кажется сродни пословице: в огороде бузина, а в Киеве дядька. Но давайте учтем, что Швейк поставил свою задачу в 1914 году, и добавим условие: год кончины бабушки равен произведению общего числа окон этого дома на число труб и на возраст (в 1914 году) одного из квартирантов, лично присутствовавшего на похоронах. Тогда решение вполне вырисовывается.

Вот и все. А в заключение — три предложения читателям:

1) Во все задачи (кроме первой) были внесены изменения и дополнения по сравнению с их исходным видом. Попробуйте внести другие, свои, изменения — возможно, они окажутся гораздо лучше и интереснее. Требование прежнее: чтобы решение было единственным.

2) При чтении художественной литературы Вам могут встретиться другие литературно-художественные задачи. Попробуйте привести их к удоборешаемому виду.

3) И наконец — поделитесь своими находками с редакцией журнала «Квант». Лучшие из них будут опубликованы.

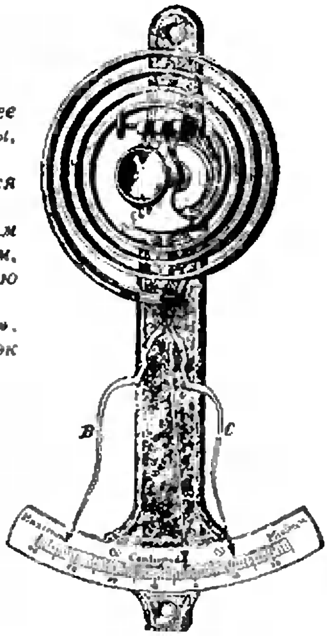
Калейдоскоп „Кванта"

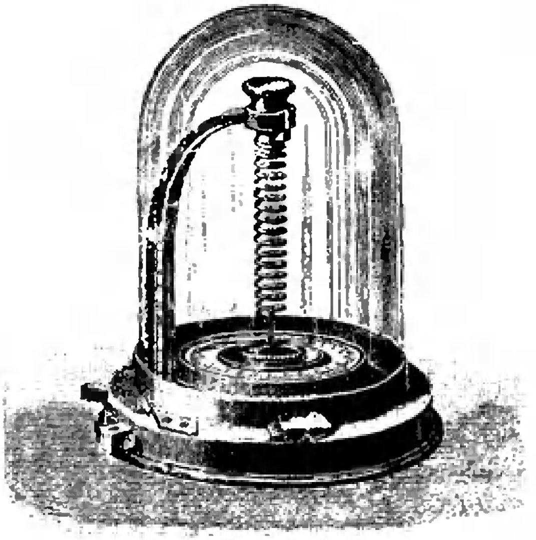
Мы должны принять как один из наиболее общих законов теплоты, что «все тела, свободно сообщающиеся друг с другом и не подверженные неравным внешним воздействиям, приобретают одинаковую температуру, что показывает термометр».

Дж. Блэк

А так ли хорошо знакома вам

температура ?





Интуитивное представление о температуре складывается с первых дней нашей жизни. Однако задачи, встающие перед наукой, требуют все более точных толкований того, что мы постигаем чувствами. Так, важным этапом в развитии учения о тепловых явлениях было выявление различия между понятиями «количество теплоты» и «температура». Первым, кто четко сформулировал мысль о необходимости их различения, был шотландский ученый Дж. Блэк.

Интересна и познавательна история создания и применения приборов для измерения температуры — термометров. Сегодня известны термометры жидкостные и газовые, полупроводниковые и оптические. Да и разнообразие введенных ныне в науку температур велико: различают электронную и ионную температуру, яркостную и цветовую, шумовую и антенную и т. д.

Но не смущайтесь! В этом выпуске «Калейдоскопа» разговор пойдет о самой обычной, можно сказать, «школьной» температуре.

Вопросы и задачи

1. На горячей отопительной батарее лежит давно просохшее полотенце. Одинаково ли нагреты батарея и полотенце, если оценивать на ощупь? Одинаковы ли их температуры?

2. Понизится ли температура в комнате, если открыть дверцу работающего холодильника?

3. В кастрюле кипит вода, и в ней варятся макароны. Кипит ли вода в трубках макарон?

4. Как надо поступить, чтобы сильнее остудить горячий чай: сразу бросить в него сахар и затем подождать пять минут или, выждав пять минут, положить сахар и растворить его?

5. В колбу с узким горлышком налили керосин и отметили уровень его в горлышке. Если опустить колбу в горячую воду, то в первый момент уровень керосина опустится, в дальнейшем же он начнет повышаться. Почему?

6. На диске, вырезанном из медной пластинки, начертили отрезок прямой. Останется ли он прямым, если диск нагреть?

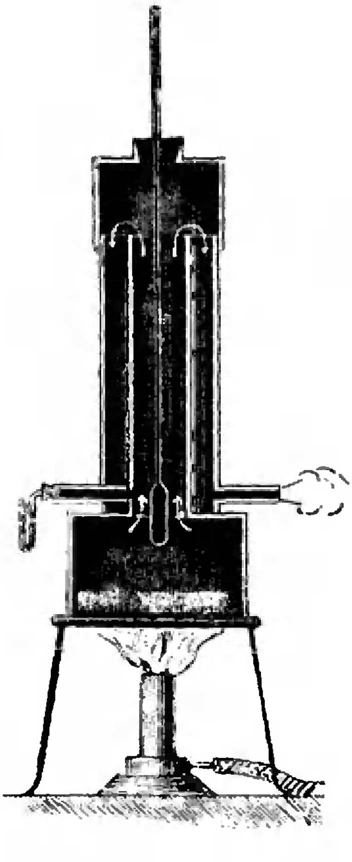
7. Как измерить медицинским термометром температуру тела человека, если температура окружающего воздуха равна 42 °C?

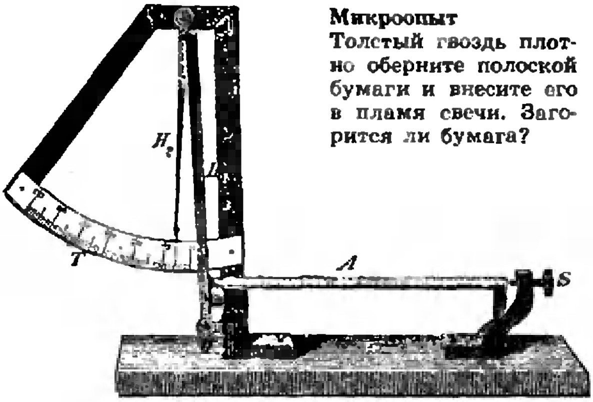
8. Можно ли пользоваться ртутным термометром в Антарктиде?

9. Имеются два непроградуированных термометра. Как определить, какой из них нагрет больше?

10. Что покажет термометр, который возьмет с собой космонавт, выходя в открытый космос?

11. Можно ли, не прибегая к помощи таблиц, сказать, выше или ниже комнатной критическая температура воды?





Микроопыт

Толстый гвоздь плотно оберните полоской бумаги и внесите его в пламя свечи. Загорится ли бумага?

12. Одну из бутылок с водой положили на лед при 0 °С, вторую — опустили в воду при 0 °С. Замерзнет ли вода в какой-нибудь из них?

13. Равные количества соли растворяют в двух одинаковых сосудах с водой. В одном случае соль берут в виде одного большого кристалла, а в другом — в виде порошка. В каком случае температура раствора после полного растворения соли будет выше, если до растворения соль и вода находились в обоих случаях при одинаковых температурах?

14. За эталон силы света принята сила света определенного участка поверхности затвердевающей платины. Почему обязательно затвердевающей?

15. Почему в местах отдыха зачастую разрешают разводить костры лишь в вечернее время?

16. Внутри воды плавает полый стеклянный пузырек. В сосуд подливают воды, и пузырек поднимается вверх. Затем еще подливают воды, и пузырек тонет. Как это можно объяснить?

Любопытно, что...

...на самом деле шведский астроном и физик Цельсий предложил шкалу, в которой точка кипения воды была обозначена числом 0, а точка плавления льда — числом 100.

...Фаренгейт загорелся идеей самому сделать термометр, когда прочитал об открытии французского физика Амонтона, «что вода кипит при фиксированной степени теплоты».

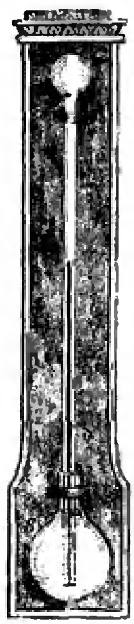
...одно время в физических лабораториях пользовались для измерения температуры так называемым весовым термометром. Он состоял из полого платинового шара, заполненного ртутью, в котором было капиллярное отверстие. Об изменении температуры судили по количеству ртути, вытекавшей из отверстия.

...наши ощущения, обычно надежные, могут подвести при определении температуры. Например, известен

опыт, когда одну руку опускают в холодную, а другую — в горячую воду. Если через некоторое время опустить сразу обе руки в теплую воду, то рука, которая до этого была в горячей воде, почувствует холод, бывшая же в холодной воде — жар.

...понятие температуры неприменимо к отдельной молекуле; о температуре, как о величине статистической, можно говорить лишь в том случае, если имеется достаточно большая совокупность частиц.

...сегодня методами магнитного охлаждения получены очень низкие, близкие к абсолютному нулю, температуры в несколько милликельвинов, а очень высокие — в миллионы кельвинов — достигаются в термоядерной плазме. В природе же сверхвысокие температуры в десятки миллионов кельвинов существуют в центрах звезд.



Что читать в «Кванте» о температуре
(публикации последних лет)

1. «Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда» — 1986, № 5, с. 26;
2. «Д. Фаренгейт и его термометры» — 1986, № 10, с. 26;
3. «Коротко о тепловом расширении» — 1988, № 8, с. 44;
4. «Абсолютная температура» — 1988, № 9, с. 60;
5. «Градусник для Солнца» — 1988, № 10, с. 40;
6. «Температура, теплота, термометр» — 1990, № 8, с. 10;
7. «О ледниках, скороварках и теореме Карно» — 1991, № 3, с. 39;
8. Калейдоскоп «Кванта» — 1986, № 1, с. 32; 1987, № 9, с. 32; 1989, № 10, с. 40.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач, по 3 в каждом номере журнала, начиная с девятого. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 января 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

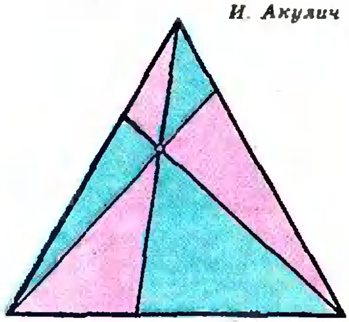
Задачи

4. Расставьте скобки в левой части равенства 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 = 7 так, чтобы оно стало верным.

С. Токарев

5. «Дорожная» шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Пусть имеется еще комплект домино, каждая кость которого покрывает ровно две соседние клетки доски. Можно ли уложить комплект домино на такой доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски?

И. Акулич



6. Через точку P внутри равностороннего треугольника проведены прямые, проходящие через его вершины. Эти прямые разбивают его на 6 треугольников (см. рисунок). Оказалось, что сумма площадей красных треугольников равняется сумме площадей синих треугольников. Докажите, что точка P лежит на одной из медиан этого треугольника.

В. Произволов

Победители конкурса «Математика 6—8»

Закончился первый конкурс «Математика 6—8», проводившийся журналом «Квант» совместно с болгарским журналом для школьников «Математика». Задачи конкурса публиковались с № 9, 1990 г. по № 5, 1991 г. Авторами задач были как советские, так и болгарские математики. Редакция подвела итоги конкурса по письмам, полученным нашим журналом.

По итогам конкурса призами журнала «Квант» и болгарского журнала «Математика» награждаются:

Советские школьники

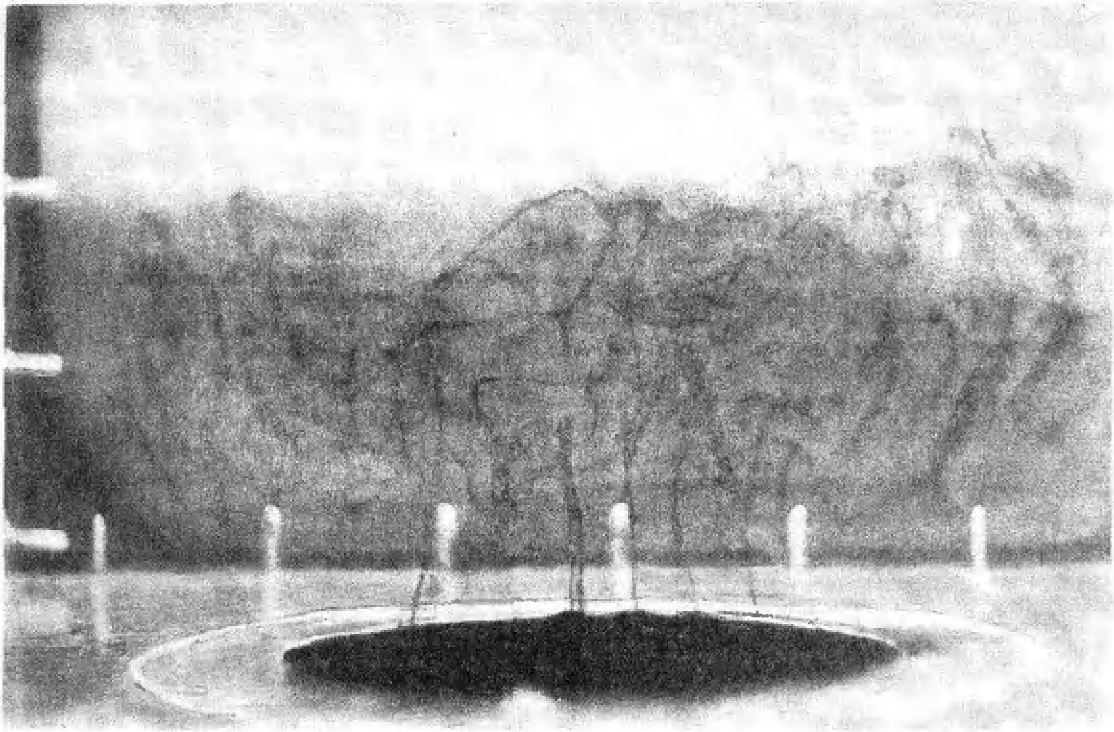
Денисов А.— С.-Петербург, с. ш. 11, 8 кл.
Щербицкая В.— Минск, с. ш. 53, 7 кл.
Лотоцкий Р.— Тернополь, с. ш. 15, 8 кл.
Гуков С.— Москва, с. ш. 265, 8 кл.
Бондарева Л.— Львов, с. ш. 73, 7 кл.
Зайцев Г.— Москва, с. ш. 444, 7 кл.
Мельник А.— Гайворон, с. ш. 2, 6 кл.
Хазанов А.— С.-Петербург, с. ш. 239, 8 кл.
Мантуров В.— Москва, с. ш. 281, 7 кл.
Карабаш И.— Донецк, с. ш. 147, 8 кл.
Шахов А.— Москва, с. ш. № 444, 8 кл.
Санников Ю.— Севастополь, с. ш. 8, 6 кл.
Бирюкова А.— Новосибирск, с. ш. 10, 8 кл.
Исаметдинов И.— С.-Петербург, с. ш. 261, 8 кл.
Рулева Ю.— Щелково
Игнатова Т.— Вильнюс, с. ш. 53, 8 кл.
Масальцев Д.— Харьков, с. ш. 104, 7 кл.
Курманалинин Х.— Алма-Ата, с. ш. 8, 7 кл.
Леонова Т.— Минск, с. ш. 149, 8 кл.
Тищенко И.— Гайворон, с. ш. 2, 8 кл.
Купавский А.— Ногинск, с. ш. 9, 8 кл.
Шалаев Д.— Павлоград, с. ш. 4, 8 кл.
Пак Е.— Душанбе, с. ш. 20, 7 кл.

Апальков Д.— Харьков, с. ш. 16, 7 кл.
Фатыхов Р.— Казань, с. ш. 95,7 кл.

Болгарские школьники

Тодоров Ивайло — Стара-Загора
Бойчев Камен — Стара-Загора
Димитрова Лада — София
Ангелова Милена — София
Шумкова Лора — София
Петков Минчо — София
Неделчева Мария — Шумен
Москова Александра — Велико-Тырново
Дончев Дилян — Стара-Загора
а также Школьный центр по математике и информатике города Стара-Загора

Жюри конкурса также отмечает успешное выступление на конкурсе следующих школьников:
Пахомов Д.— С.-Петербург, с. ш. 148, 8 кл.
Белокурова Е.— Москва, с. ш. 882, 8 кл.
Кулик А.— Канев, с. ш. 4, 6 кл.
Сидоренко Т.— Львов, с. ш. 50, 7 кл.
Вокий А.— Киев, с. ш. 98, 5 кл.
Безделин В.— Псков, с. ш. 18, 7 кл.
Гольдман И.— Москва, с. ш. 1207, 8 кл.
Исаакян О.— Москва, с. ш. 34, 8 кл.
Ханмагомедов А.— Дербент, с. ш. 19, 7 кл.
Кириллова Л.— Одесса, с. ш. 17, 7 кл.
Грищенко С.— Барнаул, с. ш. 123, 7 кл.
Томарадзе Г.— Кутаиси, с. ш. 1, 8 кл.
Мамедова Е.— Баку, с. ш. 257, 7 кл.
Минина Н.— Николаев, с. ш. 41, 7 кл.
Исавкян К.— Москва, с. ш. 34, 8 кл.
Кондратюк Т.— Львов, с. ш. 53, 8 кл.
Петренко И.— п. Дружный Пуховичского р-на Минской обл., с. ш. 1, 3 кл.
Лопатенко А.— Одинцово, с. ш. 67, 8 кл.
Фарукшин Р.— Бийск, с. ш. 20, 8 кл.
Зырянов Г.— Ташкент, с. ш. 91, 7 кл.
Трухачев Д.— С.-Петербург, с. ш. 67, 7 кл.
Кривошея К.— Винница, с. ш. 11, 8 кл.
Соловцов А.— Гомель, с. ш. 6, 8 кл.
Гавриков А.— Москва, с. ш. 8, 7 кл.
Старобинская А.— Москва, с. ш. 38, 7 кл.
Панкратов В.— Старый Оскол, с. ш. 16, 8 кл.
Гуляев Л.— Нижний Новгород, с. ш. 82, 6 кл.
Смирнова Е.— Дзержинск Нижегородской обл., с. ш. 11, 7 кл.
Соболь А.— Москва, с. ш. 243, 8 кл.
Панебратцев М.— Дубна, с. ш. 6, 6 кл.
Рогозова Н.— С.-Петербург, с. ш. 67, 7 кл.
Щербий И.— пгт Каменный Брод Житомирской обл., Каменобродская с. ш., 7 кл.
Селемир Д.— Арзамас, с. ш. 2, 7 кл.
Сенкевич О.— Иваново, с. ш. 22, 7 кл.
Гильфанова Р.— с. Иляксаз Сармановского р-на Татарской ССР, Иляксазовская с. ш., 6 кл.
Дилдаров М.— Ташкент, с. ш. 201, 7 кл.
Ногина О.— Челябинск, с. ш. 127, 7 кл.
Шувалов В.— Москва, с. ш. 2, 8 кл.
Шахпутов Е.— Целиноград, с. ш. 1, 8 кл.
Фейгенсон О.— Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 51, 8 кл.
Денисюк Н.— Пущино, с. ш. 2, 8 кл.
Демина С.— Конаково, с. ш. 3, 8 кл.
Бакалейник Л.— Бар, с. ш. 2, 7 кл.
Малютин А.— Сумы, с. ш. 12, 7 кл.
Сонни С.— Челябинск, с. ш. 37, 6 кл.
Колпакова О.— р. п. Чернышковский Волгоградской обл., с. ш. 2, 7 кл.
Хамхидько А.— Старый Оскол, с. ш. 16, 8 кл.
Норднймер С.— с. Раздольное Вишневского р-на Целиноградской обл., Берсуатская с. ш., 7 кл.
Заболоцкий Е.— Дзержинск Нижегородской обл., с. ш. 24, 6 кл.
Власова Т.— Петровск-Забайкальский, с. ш. 6, 6 кл.
Ковалева А.— Киев, с. ш. 257, 7 кл.
Куксенко Д.— С.-Петербург, с. ш. 121, 8 кл.
Дериенко А.— Кременчуг, с. ш. 6, 7 кл.
Евчик Т.— Пинск, с. ш. 4, 7 кл.
Кулевцова Д.— Бишкек, Беш-Кунгейская, с. ш., 6 кл.
Моторенко Е.— Петровск-Забайкальский, с. ш. 6, 6 кл.
Прохоров Д.— Минск, с. ш. 19, 7 кл.
Еремеев Ю.— Целиноград, с. ш. 1, 8 кл.
Глушкова О.— Таганрог, с. ш. 9, 7 кл.
Рогозянская О.— Уральск, с. ш. 21, 7 кл.
Джафаров Р.— п. Порт-Ильич Ленкоранского р-на АзССР, с. ш. 2, 7 кл.
Иванов К.— Подольск, с. ш. 26, 6 кл.
Мамедов М.— с. Галалы Сальянского р-на АзССР, с. ш. 4, 8 кл.
Волков А.— Минск, с. ш. 36, 6 кл.
Ставицкий А.— Киев, с. ш. 136, 8 кл.
Боугашков Д.— Жуковский, с. ш. 3, 7 кл.



Лаборатория „Кванта"

«Грибы» под лампочкой и... война в заливе

Доктор физико-математических наук
Б. БУБНОВ

Одной из причин изменения климата в отдельных регионах земного шара является тепловой нагрев «грязной» атмосферы (некоторые аспекты этой проблемы обсуждались в статье «Поговорим немного о погоде...», опубликованной в «Кванте» в № 11—12 за 1988 год). За счет сильного загрязнения продуктами горения, которые образуются в результате природных или искусственных катаклизмов (извержения вулканов, пожары, выбросы пыли и земли при сильных взрывах), атмосфера становится непрозрачной для солнечного излучения, что существенно изменяет циркуляцию воздушных потоков. Так, пожары на нефтяных скважинах Кувейта, возникшие в ходе войны в Персидском заливе, изменили климат страны на долгое время, понизив среднюю температуру на 10 градусов.

Подобные «натурные» эксперименты, предлагаемые самой жизнью, вызывают необходимость в исследовании похожих явлений в лабораторных условиях. В период постоянного «перехода от дефицита к изобилию» предлагать эксперименты «эпохи застоя», в которых используются крахмал или подсолнечное масло, является садистским искушением. Отбросить это искушение автору помогло посещение магазина «Свет», в котором ничего не было, кроме сиротливо торчащих 500-ваттных лампочек. Вспомнились эксперименты по моделированию реакции атмосферы Земли на глобальные катастрофы, где использовались лампы большой мощности. Эксперименты были проведены выпускником средней школы П. Берловым. Используемое оборудование очень просто, и подобные эксперименты могут быть воспроизведены дома, для чего вам понадобятся банка с водой, черные чернила и лампочка большой мощности.

Первым делом надо создать «атмосферу» (или «океан»), в которой мы будем наблюдать конвективные потоки. Возьмите прозрачную банку или аквариум, желательно большого объема (форма безразлична). На дно банки установите полость, в которую затем будут налиты чернила. Если дно сосуда плоское, то такой полостью может служить кольцо, прикрепленное ко дну пластилином, в крайнем случае края полости можно сделать из пластилина. Не следует делать высоту полости больше 2—3 мм, так как большая высота приведет к значительному расходу чернил. От того, как установлена полость, во многом зависит успех эксперимента. Даже небольшой ее наклон может привести к тому, что чернила растекутся по сосуду.

Теперь заполним банку водой и дадим ей некоторое время отстояться.

Следующий шаг — заполнение полости на дне чернилами. Лучше брать черные чернила, которые ясно показывают конвективные движения и хорошо растворяются в воде. Понятно, что нельзя сначала налить чернила, а потом воду, так как чернила сразу перемешаются с водой. Лучше всего наливать чернила, температура которых ниже температуры воды. В этом случае плотность чернил больше плотности воды и чернила хорошо растекутся по дну полости. Так что сначала охладите чернила, затем наберите их шприцем или резиновой грушей через трубочку для коктейля, вытрите остатки чернил и, аккуратно подведя трубочку ко дну, медленно вылейте чернила в полость. Затем неспеша выньте трубочку из сосуда. В резуль-

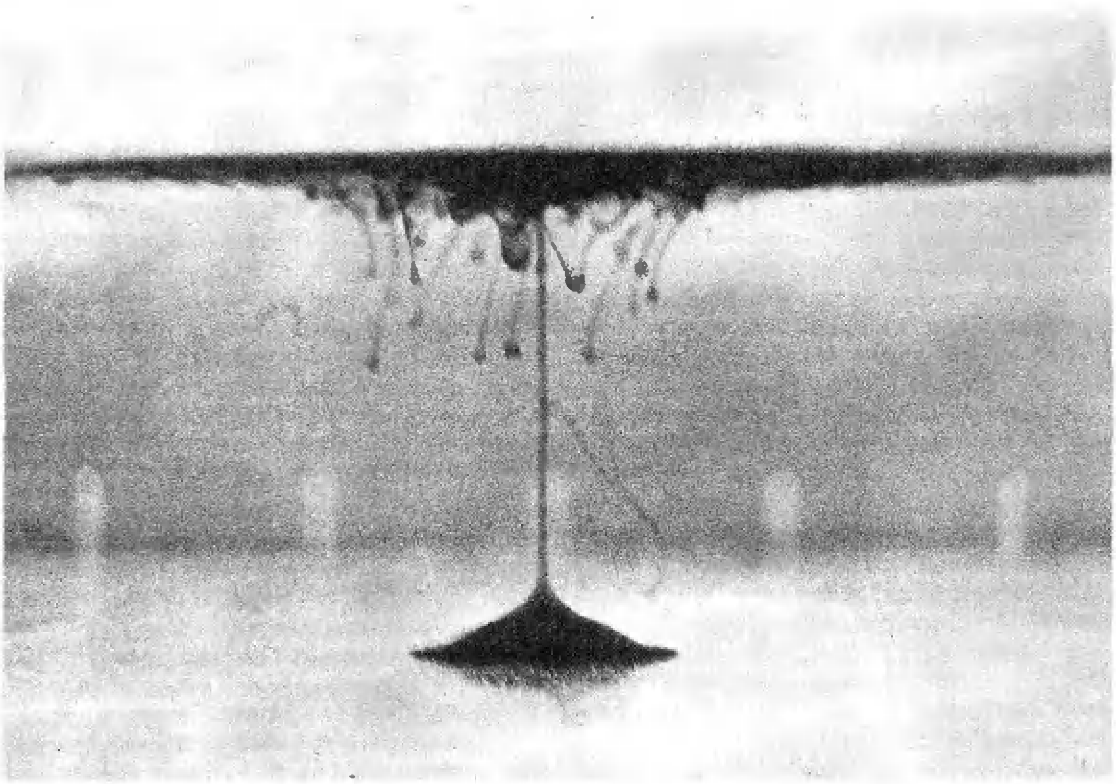


Рис. 1.

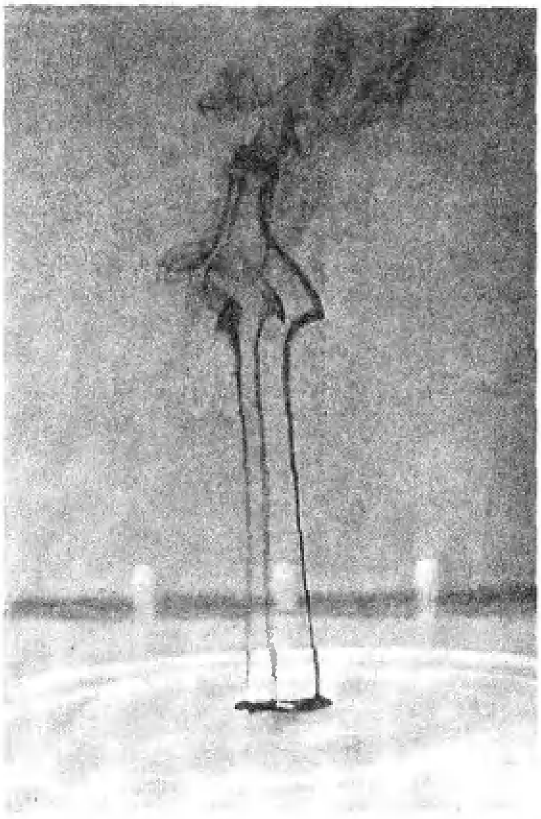


Рис. 2.

тате у вас окажется сосуд с водой, на дне которого находится полость, заполненная черными чернилами. (Чтобы достичь совершенной картины, нам потребовалось не один десяток раз повторить эту операцию, но, конечно, для того чтобы «просто посмотреть», достаточно двух-трех попыток.)

Теперь остается включить лампочку и наблюдать за возникающими движениями. Лампу следует поместить на расстоянии 3—5 см от поверхности воды, и во избежание взрыва внимательно следить, чтобы случайные капли воды не попали на нее.

Посмотрим, что же происходит в нашей банке. Под действием света чернила нагреваются, становятся теплее, чем вода, и стремятся подняться. Это — общий принцип так называемой свободной тепловой гравитационной конвекции. Картины конкретных возникших движений и их характеристики будут зависеть от многих параметров, главные из которых — интенсивность светового потока, глубина налитой жидкости и диаметр полости, в которую налиты чернила.

Рассмотрим основные виды движений, наблюдаемых в этих экспериментах, считая, что световой поток примерно постоянен. Если чернила занимают маленькую площадь на дне, то основное движение представляет собой интенсивный фонтан чернил (рис. 1), который при небольшом уровне жидкости в сосуде достигает ее поверхности. Если же уровень жидкости в сосуде велик, то этот одиночный фонтан становится неустойчивым, и на некотором расстоянии от дна образуется утолщение, из которого как бы вырастает новый кривой фонтан. Этот процесс напоминает падение капли чернил в воде. Падая в жидкости, капля чернил достигает некоторого положения, при котором движение прекращается или резко замедляется. Через некоторое время из этого положения возникает новое движение капли до следующего стационарного уровня. Если немного увеличить диаметр полости для чернил, то одиночный фонтан будет неустойчив, поднятие происходит двумя или тремя струями (рис. 2). При среднем диаметре полости возникает автоколебательный режим — грибообразное движение (рис. 3), при котором струи, составляющие ножку «гриба», то приближаются, то отдаляются от центра. Если площадь чернил на дне совсем большая, то наблюдается хаотическое поднимание отдельных искривленных струй чернил, обычно называемых термиками (см. рисунок на с. 44). Такое движение характерно для режима турбулентной конвекции в плоском слое.

Как это часто бывает, простые, с первого взгляда, эксперименты скрывают много непонятных и нерешенных проблем.

Эти эксперименты, с одной стороны, позволяют рассмотреть переход от ламинарных движений, образуемых на границах полости, к нерегулярным турбулентным движениям внутри кольца большого диаметра. С другой стороны, процессы, происходящие в пограничных слоях на кра-

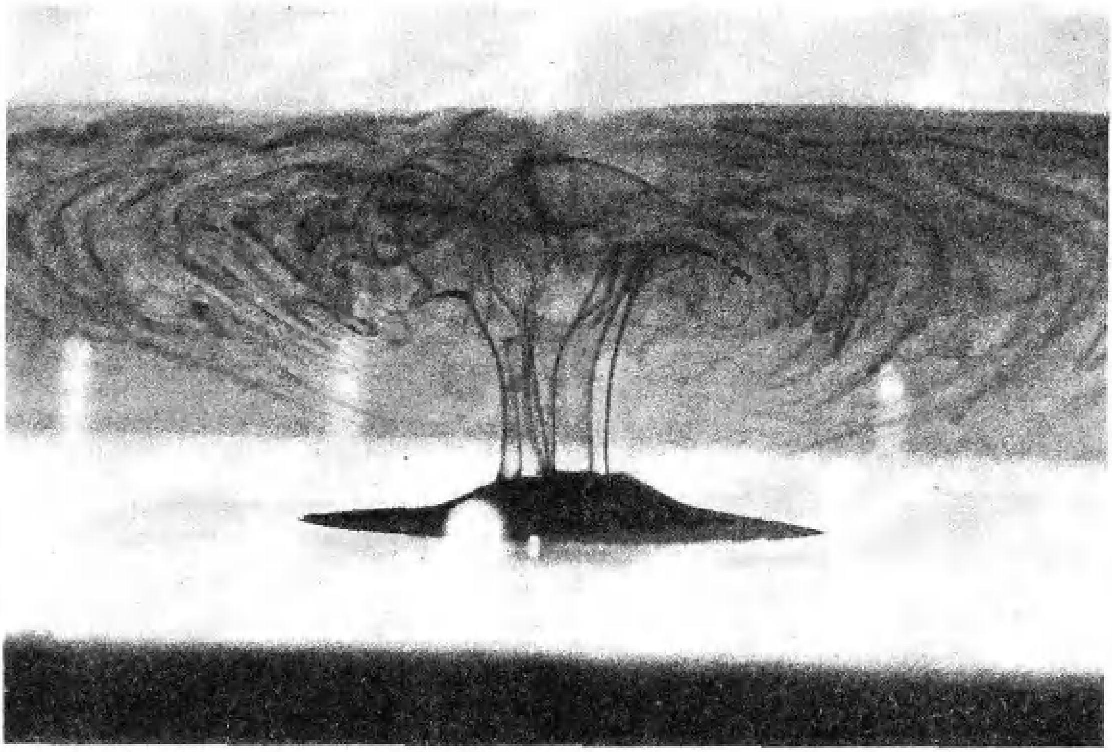
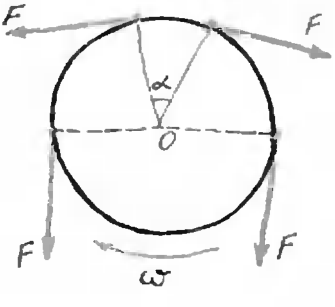


Рис. 3.

ях кольца, *«задают»* движения и внутри его, принципиальную роль играют также вторичные течения, обусловленные боковыми границами. С точки *зрения квалифицированного экспериментатора,* здесь больше вопросов, чем ответов. А с точки зрения неквалифицированного — просто красиво...

Нам пишут

В шестом номере «Кванта» опубликовано решение задачи Ф1277, в котором показано, как найти положение центра масс проволочной полуокружности, используя энергетические соображения. Тот же самый результат довольно просто получается и другим физическим методом — с помощью динамики вращательного движения.



Сначала возьмем целое проволочное кольцо массой m и раскрутим его вокруг оси O до угловой скорости ω. Найдем силу натяжения проволоки F, записав закон Ньютона для маленького элемента проволоки, соответствующего центральному углу α:

$$F\alpha = \frac{m\alpha}{2\pi}\omega^2 R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{m\omega^2 R}{2\pi},$$

где R — радиус кольца.

Теперь запишем закон Ньютона для полуокружности. Заметим, что ее центр масс движется по окружности радиусом $l_ц$ ($l_ц$ — искомое расстояние от центра масс полуокружности до ее центра), поэтому получаем

$$2F = \frac{m}{2}\omega^2 l_ц.$$

Отсюда, подставив выражение для F, находим

$$l_ц = \frac{2R}{\pi}.$$

И. Акешин

Математический кружок

Гармонический четырехугольник

Кандидат физико-математических наук Я. ПОНАРИН

В этой статье вы познакомитесь с одной из замечательных фигур планиметрии — особым видом вписанного в окружность четырехугольника. А прежде нужна небольшая

Подготовка

Напомним сначала, что такое отношение направленных отрезков (см. также статью В. Эрдниева, Н. Манцаева «Теоремы Чевы и Менелая» в третьем номере «Кванта» за 1990 год). Пусть даны два коллинеарных вектора: $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ (рис. 1). Их отношением назовем такое число λ, что $|\lambda| = \frac{AM}{MB}$, причем $\lambda > 0$, если векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ сонаправлены, и $\lambda < 0$, если их направления противоположны (вы можете легко убедиться, что с такими отношениями можно обращаться, как с обычными дробями).*)

Если даны точки A и B и $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \neq -1$, то тем самым точка M задана однозначно. Действительно, допустим что найдутся две точки M и N, такие что

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}.$$

Добавим к обеим частям этого равенства по единице:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} + \frac{\overline{NB}}{\overline{NB}}.$$

Тогда

$$\frac{\overline{AM}+\overline{MB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}+\overline{NB}}{\overline{NB}},$$

т. е.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{NB}},$$

значит,

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NB} \text{ и } M = N.$$

Принято говорить, что *точка M делит отрезок AB в отношении λ*. Заметьте, что точка может делить отрезок, находясь вне его!

При $\lambda > 0$ точка M принадлежит отрезку AB, при $\lambda < 0$ находится вне его на прямой AB. В частности, если $\lambda = 1$, то M — середина AB; если же $\lambda = -1$, это значит, что $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MB}$, т. е. точки A и B совпадают. Поэтому случай $\lambda = -1$ нами исключен (при совпадении A и B точка M задана неоднозначно).

Определение. *Упорядоченная четверка точек прямой $(A, B; C, D)$ называется гармонической, если точ-*

*) Чтобы отличать отношение направленных отрезков от отношения их длин, будем ставить черточку над обозначением отрезка в знак того, что на нем задано направление.

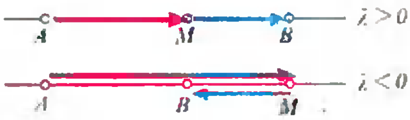


Рис. 1.

ки C и D делят отрезок AB в отношениях, отличающихся только знаком: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$. *При этом пара точек A, B называется базисной, а пара C, D — делящей.*

Однако базисную и делящую пары можно поменять ролями, так как если $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$, то и $\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$. Иными словами, если упорядоченная четверка $(A, B; C, D)$ гармоническая, то будет гармонической и упорядоченная четверка $(C, D; A, B)$.

Проверьте сами, что гармоничность четверки точек сохранится, если изменить порядок точек в базисной или делящей паре.

Гармонические четверки точек довольно часто встречаются, хотя, быть может, вы их и не замечали. Вот один из примеров. Пусть дан треугольник ABC и биссектрисы его внутреннего и внешнего углов при вершине C пересекают прямую AB в точках M и N (рис. 2). Тогда упорядоченная четверка $(A, B; M, N)$ является гармонической, поскольку, как известно,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{AC}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -\frac{AC}{BC}.$$

Упражнение. Докажите, что гармоническая четверка $(A, B; C, D)$ полностью определяется тремя своими точками.

На рисунке 3 показан способ построения четвертой точки, D, по трем остальным. Здесь через точки A и B произвольным образом проведены две параллельные друг другу прямые, а через точку C — прямая, пересекающая их в точках P и Q соответственно. Точка S на прямой BQ такова, что $QB = BS$. Тогда точка пересечения прямых PS и AB — искомая.

Упражнение. Докажите, что построенная таким способом точка — действительно недостающая точка гармонической четверки.

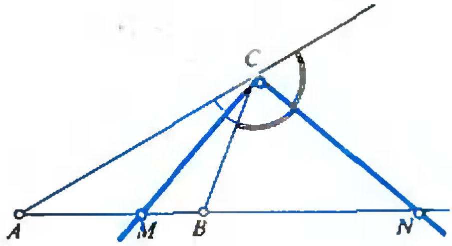


Рис. 2.

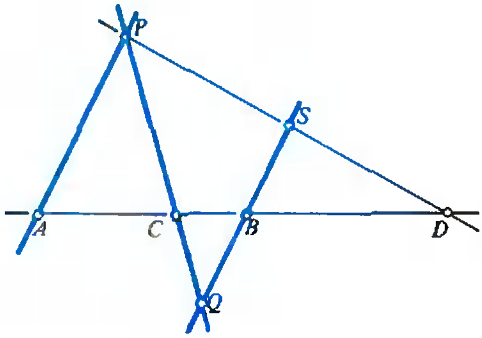


Рис. 3.

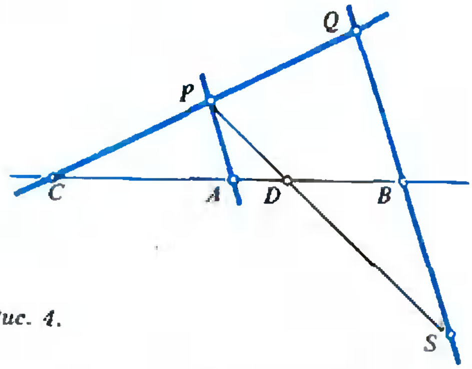


Рис. 4.

Такое же построение позволяет найти недостающую точку D и в том случае, когда точка C расположена вне отрезка AB (рис. 4).

Упражнение. Найдите пробел в описанном выше способе построения (указание: вспомните о том, что значение $\lambda = -1$ исключено).

Теперь все готово для того, чтобы представить вам

Гармонический четырехугольник

Определение. *Вписанный в окружность четырехугольник называется гармоническим, если произведения длин его противоположных сторон равны.*

Из этого определения пока не видно связи гармонического четырехугольника с гармоническими четверками точек. Ниже она выяснится.

Очевидным примером гармонического четырехугольника служит вписанный дельтоид (рис. 5) — четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, одна из которых делит другую пополам. В частности, он может быть квадратом.

Другим частным видом гармонического четырехугольника является гармоническая трапеция (рис. 6). Ясно, что она равнобедренная. Пусть AB и CD — основания гармонической трапеции $ABCD$. Обозначим $AB=a$, $CD=b$, $AD=BC=c$, $AC=BD=d$. Согласно определению гармонического четырехугольника $ab=c^2$, т. е. *боковая сторона гармонической трапеции является средним геометрическим ее оснований.* Кроме того, во всяком вписанном четырехугольнике произведение длин диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон (теорема Птолемея*)). Поэтому $d^2=ab+c^2$ и, значит, $d^2=2c^2$, откуда $d=c\sqrt{2}$, т. е. диагональ гармонической трапеции с боковой стороной c равна диагонали квадрата со стороной c. Если описанная окружность имеет радиус R, то $d<2R$, следовательно, $c<R\sqrt{2}$ (в случае равенства $c=R\sqrt{2}$ трапеция становится вписанным квадратом).

Таким образом, гармоническую трапецию можно задать двумя основаниями a и b, по которым просто строятся боковая сторона и диагональ. Ее можно задать также радиусом описанной окружности и боковой стороной, с помощью которых легко находятся все остальные элементы.

Рассмотрим теперь

Общие свойства гармонических четырехугольников

Условимся говорить, что в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и BC прилежат к диагонали AC. К ней прилежат также и стороны AD и DC.

Теорема 1. *В гармоническом четырехугольнике каждая из диагоналей делится точкой их пересечения в отношении квадратов прилежащих сторон.*

Действительно, рассмотрим гармонический четырехугольник $ABCD$. Пусть M — точка пересечения его диагоналей (рис. 7). Треугольники

*) См., например, «Квант», 1991, № 4, с. 42.

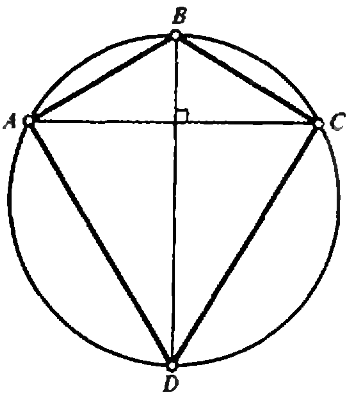


Рис. 5.

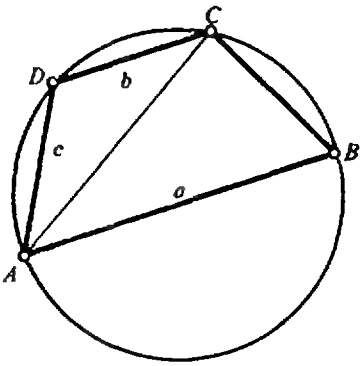


Рис. 6.

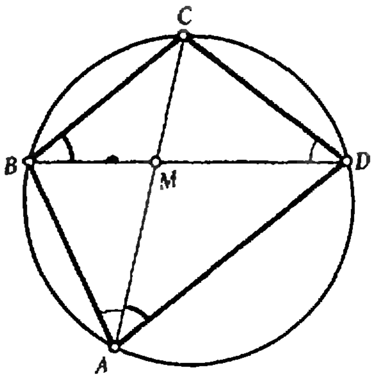


Рис. 7.

ABM и *DCM* подобны (почему?), значит,

$$AM \cdot MC = BM \cdot MD \text{ и } \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{CD}.$$

Из подобия треугольников *AMD* и *BCM* имеем также

$$\frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC}.$$

Перемножим полученные пропорции почленно:

$$\frac{BM \cdot MD}{MC^2} = \frac{AD \cdot AB}{BC \cdot CD}.$$

Но $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, следовательно,

$$\frac{AM \cdot MC}{MC^2} = \frac{AD \cdot AB}{BC \cdot CD}.$$

или

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD \cdot AB}{BC \cdot CD}. \qquad (*)$$

Поскольку четырехугольник *ABCD* гармонический, то $AD \cdot BC = AB \cdot CD$, откуда

$$CD = \frac{AD \cdot BC}{AB}.$$

Подставив это выражение в (*), получим

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD \cdot AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AD \cdot BC} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

Аналогично

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD^2}{DC^2} \text{ и } \frac{BM}{MD} = \frac{BC^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AD^2}.$$

Замечание. Известно, что прямая, проходящая через вершину треугольника и делящая его противоположную сторону в отношении квадратов прилежащих сторон, симметрична медиане относительно биссектрисы угла при этой вершине. Она называется симедианой треугольника*).

Теорема 2. *Две противоположные вершины гармонического четырехугольника, точка пересечения его диагоналей и точка пересечения прямой, содержащей эти вершины, с касательной к описанной окружности в третьей вершине образуют гармоническую четверку точек.*

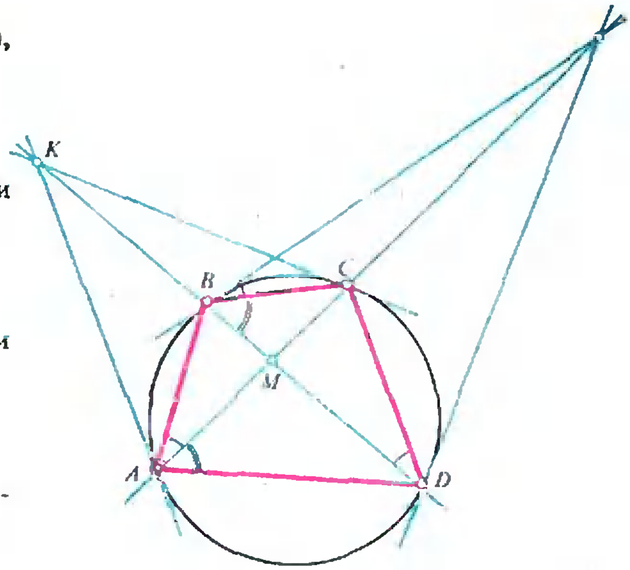


Рис. 8

В самом деле, пусть касательная в вершине *B* пересекается с прямой *AC* в точке *P* (рис. 8). Тогда $\angle BAC = \angle CBP$ (чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу); следовательно, треугольники *BCP* и *BAP* подобны. Поэтому

$$AP \cdot PC = BP^2$$

и

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{BC}.$$

Разделив обе части первого равенства на PC^2, получим

$$\frac{AP}{PC} = \frac{BP^2}{PC^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

Если теперь привлечь теорему 1 для гармонического четырехугольника и учесть направление векторов, то получим окончательно: $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}$. Точки *M* и *P* делят отрезок *AC* внутренним

*) Об этом вы можете подробнее прочитать в книге С. И. Зетеля «Новая геометрия треугольника» (Учпедгиз, 1962, с. 100—103).

и внешним образом в равных по абсолютной величине отношениях.

Следствие. *Касательные к описанной около гармонического четырехугольника окружности в его противоположных вершинах пересекаются на прямой, содержащей его диагональ, или же параллельны этой диагонали.*

Действительно, если провести касательную в вершине D, то согласно теореме 2 она пересечет прямую AC в точке, которая вместе с теми же точками A, C, M составит гармоническую четверку. Но для трех данных точек четвертая точка гармонической четверки единственна. Это свойство, конечно, справедливо и для касательных в вершинах A и C. Параллельность касательных и диагонали имеет место в случае дельтоида.

Теорема 3. *Если касательные в концах одной диагонали вписанного четырехугольника пересекаются на прямой, содержащей вторую диагональ, или ей параллельны, то этот четырехугольник — гармонический.*

В самом деле, при доказательстве теоремы 2 получено равенство $\frac{AP}{PC}=\frac{AB^2}{BC^2}$, верное для любого вписанного четырехугольника $ABCD$. По условию, касательная в точке D пересекает AC в той же точке P, поэтому также $\frac{AP}{PC}=\frac{AD^2}{DC^2}$. Следовательно, $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$, т. е. четырехугольник $ABCD$ гармонический.

На этой теореме основан способ построения гармонического четырехугольника $ABCD$ по трем заданным вершинам A, B и C.

Около треугольника ABC опишем окружность и проведем к ней через вершину B касательную. Если отрезки AB и BC не равны, то она пересечет прямую AC в некоторой точке P. Достаточно теперь провести через P вторую касательную к нашей окружности, и мы получим недостающую вершину гармонического четырехугольника. Если же $AB=BC$ и касательная в точке B параллельна AC, это значит, что искомый четырехугольник — дельтоид, поэтому вершина D — точка пересечения срединного перпендикуляра к AC с окружностью. В общем случае можно поступить и несколько иначе: если K — точка пересечения касательных в заданных вершинах A и C, то вершина D является второй точкой пересечения прямой BK с окружностью.

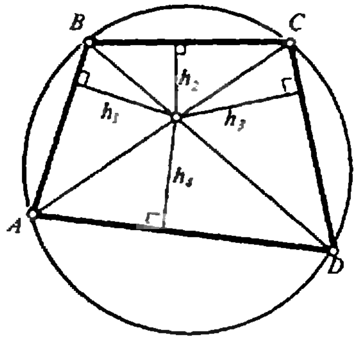


Рис. 9.

Теорема 4. *В гармоническом четырехугольнике расстояния от точки пересечения диагоналей до сторон пропорциональны длинам этих сторон.*

Взгляните на рисунок 9. Обозначим расстояния точки M до прямых AB, BC, CD, DA соответственно h_1, h_2, h_3, h_4. Отношение площадей треугольников AMB и BMC равно $AM:MC$. С другой стороны, отношение этих же площадей равно $\frac{AB\cdot h_1}{BC\cdot h_2}$. По теореме 1 $\frac{AM}{MC}=\frac{AB^2}{BC^2}$ и, следовательно, $h_1:h_2=AB:BC$. Аналогично $h_2:h_3=BC:CD$ и $h_3:h_4=CD:DA$.

В заключение — еще одно

Замечание. *Четыре комплексных числа a, b, c, d образуют гармоническую четверку, если*

$$\frac{a-b}{b-c}=-\frac{a-d}{d-c}.$$

В седьмом номере нашего журнала за этот год опубликована статья Ю. Соловьева о комплексных числах, где, в частности, описано их геометрическое представление. Каждому из чисел a, b, c, d соответствует точка плоскости A, B, C, D. Если комплексные числа образуют гармоническую четверку, то $ABCD$ — гармонический четырехугольник, и наоборот.

Задачи на построение в тонких линзах

В. ВОЛКОВ

На устных вступительных экзаменах часто встречаются задачи на построение в линзе. Причиной тому — удобство для экзаменатора: задачу легко сформулировать, ничего не надо записывать, достаточно нарисовать картинку. Опыт показывает, что даже неплохо подготовленных абитуриентов такие задачи часто ставят в тупик — особенно нетрадиционные, не разобранные в учебнике. Я решил помочь абитуриентам и, начиная с простых и кончая достаточно нестандартными, разобрать несколько задач на построение в линзах.

Прежде чем вы начнете читать статью, возьмите в руки учебник и повторите основные определения: оптический центр, главная и побочная оптические оси, фокусное расстояние, фокальная плоскость. На рисунках 1—3 приведены три основных случая построения изображения точки предмета, лежащей вне главной оптической оси; в каждом построении используются три основных луча.

Перед тем как перейти к разбору задач, сделаем одно важное замечание. Для удобства и наглядности в рисунках к статье используются лучи, идущие под различными, в том числе большими углами к главной оптической оси. Однако надо помнить, что на самом деле речь идет только об узких приосевых пучках: именно такие лучи формируют четкое изображение.

Задача 1. *Точечный источник света находится в фокусе рассеивающей линзы. Постройте его изображение.*

В данном случае (рис. 4) все три «удобных» луча совпадают (луч SO).

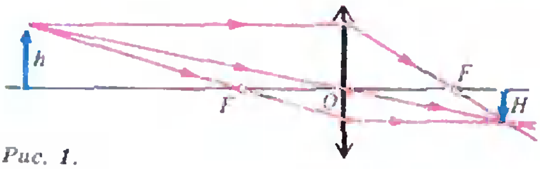


Рис. 1.

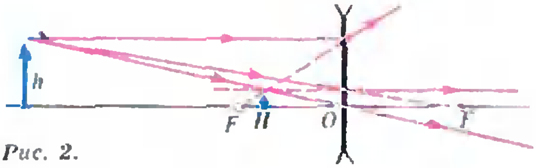


Рис. 2.

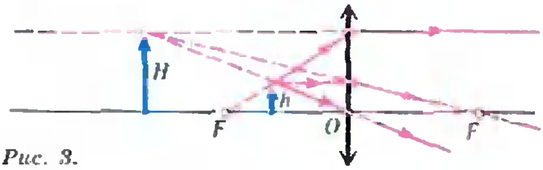


Рис. 3.

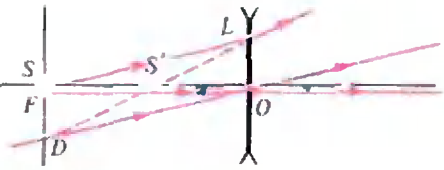


Рис. 4.

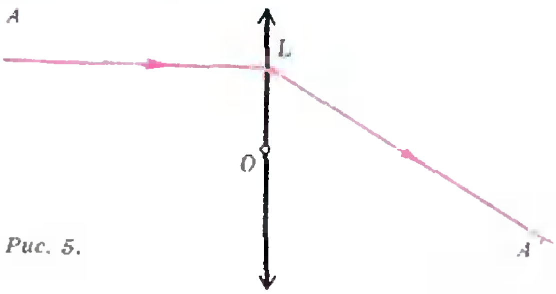


Рис. 5.

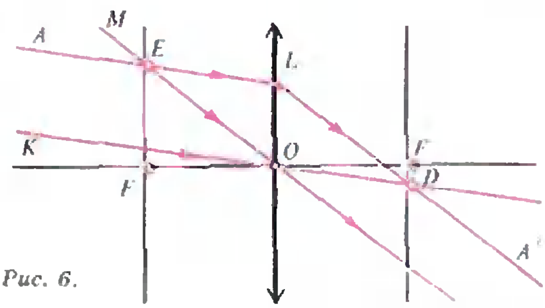


Рис. 6.

Рис. 7.

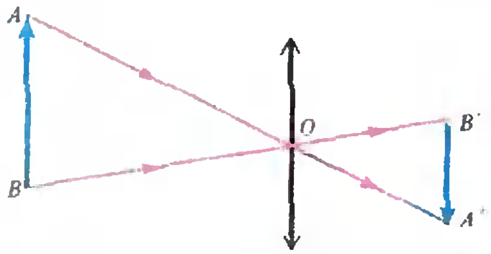


Рис. 8.

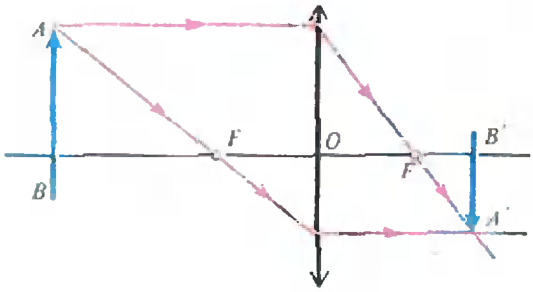


Рис. 9.

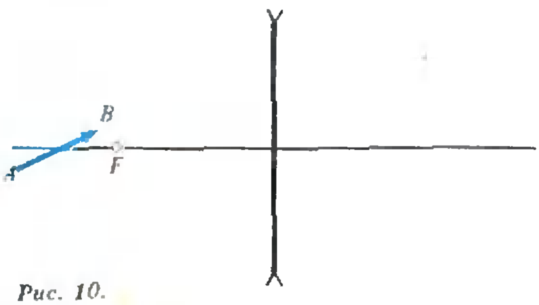


Рис. 10.

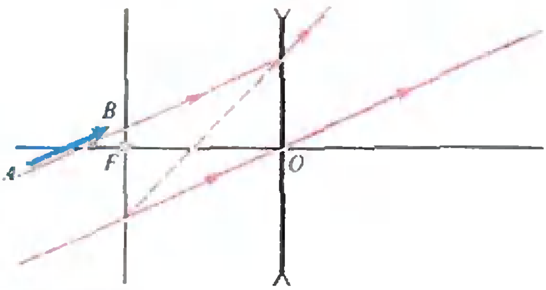


Рис. 11.

Поэтому проведем произвольный луч SL. После преломления в линзе его продолжение пройдет через ту же точку D в фокальной плоскости, что и параллельный ему луч, идущий, не преломляясь, через оптический центр линзы. (Заметим, что так как линза рассеивающая, то соответствующая плоскость находится перед линзой.) Точка пересечения продолжения преломленного луча с главной оптической осью даст искомое мнимое изображение S'. (Из равенства треугольников SLO и ODS, $S'OL$ и $S'SD$ следует, что $S'O=F/2$. Проверьте этот ответ с помощью формулы линзы.)

Задача 2. *Дан ход луча AL после преломления в тонкой линзе — луч LA'. Оптический центр линзы O (рис. 5). Построением определите положение главных фокусов линзы.*

Проведем луч KO, параллельный AL, через оптический центр линзы (рис. 6). Он пересечется с преломленным лучом в точке D задней фокальной плоскости. Восстановив фокальную плоскость, мы находим точку F — главный задний фокус. Проведем луч MO, параллельный лучу LA'. Он пройдет через ту же точку E в передней фокальной плоскости, что и луч AL. Восстанавливая фокальную плоскость, находим положение переднего фокуса.

Задача 3. *По положению предмета и его изображения (параллельные стрелки AB и $A'B'$ (рис. 7)) восстановите положение линзы и ее главных фокусов.*

Оптический центр линзы O находится на пересечении непреломляющихся лучей AA' и BB' (рис. 8). Плоскость линзы параллельна стрелкам. Главная оптическая ось перпендикулярна им. Далее, проводя через точки A и A' лучи, параллельные главной оптической оси (рис. 9), находим положение главных фокусов линзы.

Задача 4. *Постройте изображение стрелки AB в тонкой отрицательной линзе (рис. 10).*

Поскольку луч AB проходит через все «светящиеся» точки (рис. 11), соответствующий ему преломленный луч (точнее, его продолжение) будет про-

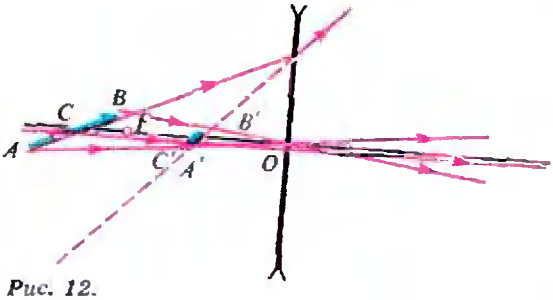


Рис. 12.

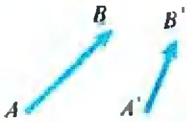


Рис. 13.

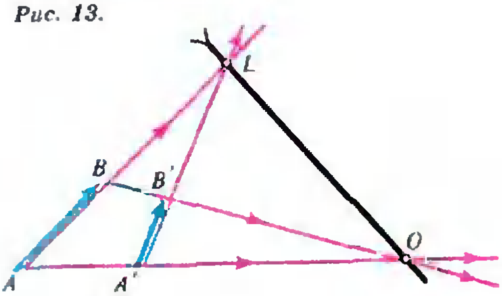


Рис. 14.

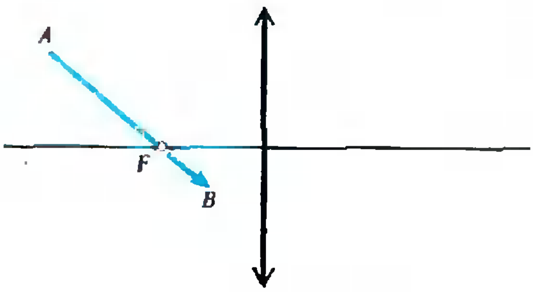


Рис. 15.

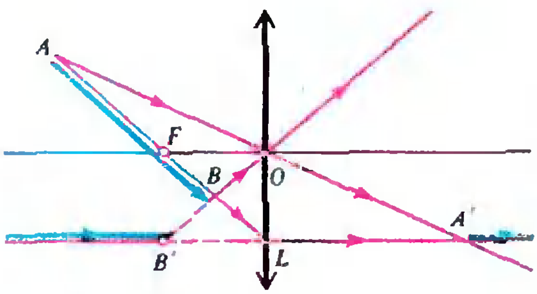


Рис. 16.

ходить через все точки изображения. Построив изображения A' и B' (используя непреломляющиеся лучи AO и BO), можно утверждать, что все точки изображения лежат между ними (рис. 12). Пример такой точки C' — изображение точки C.

Задача 5. *Восстановите положение линзы и ее главных фокусов по известным положениям предмета AB и его изображения $A'B'$ (рис. 13).*

После преломления в линзе луч AB (испускаемый всеми «светящимися» точками предмета) должен пройти через все точки изображения $A'B'$. Поэтому, очевидно, что точка L пересечения прямых AB и $A'B'$ (рис. 14) лежит на линзе. Через оптический центр линзы O проходят непреломляющиеся лучи, т. е. прямые, соединяющие «светящуюся» точку и ее изображение. Значит, оптический центр линзы находится на пересечении прямых AA' и BB'. Главная оптическая ось перпендикулярна «плоскости» тонкой линзы. Построение фокусов можно выполнить так же, как и в задаче 3. Проделайте это самостоятельно.

В данном примере линза оказалась рассеивающей. Придумайте сами такое расположение отрезков AB и $A'B'$, чтобы получилась собирающая линза.

Построение изображения предмета в собирающей линзе становится несколько более сложным, если предмет «пересекает» фокальную плоскость. В этом случае изображение предмета «разорвано»: часть изображения — действительные «светящиеся» точки за линзой, другая часть — мнимые изображения точек предмета перед линзой.

Задача 6. *Постройте изображение наклонной стрелки AB, проходящей через главный фокус собирающей линзы (рис. 15).*

Как и в предыдущих задачах, изображение стрелки лежит на прямой, содержащей луч, получающийся из луча AB после преломления в линзе (рис. 16). В данном случае эта прямая параллельна главной оптической оси линзы. Используя лучи AO и BO, найдем положения точек A' и B'.

Убедитесь сами, что отрезок AF

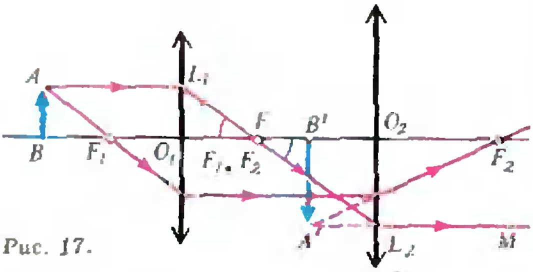


Рис. 17.

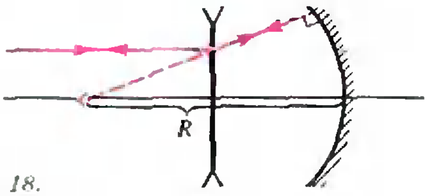


Рис. 18.

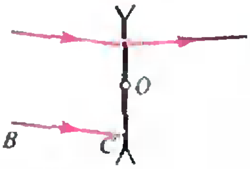


Рис. 19.

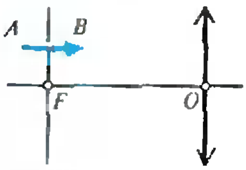


Рис. 20.

(верхняя часть AB) отображается в полупрямую, лежащую справа от A', а отрезок FB — в полупрямую, лежащую слева от B' (для этого постройте изображения каких-нибудь точек, принадлежащих этим отрезкам).

Задача 7. *Оптическая система состоит из двух собирающихся линз с общей оптической осью и фокусными расстояниями F_1 и F_2. Расстояние между линзами $l=F_1+F_2$. Определите поперечное увеличение этой системы.*

Рассмотрим увеличение стрелки AB, перпендикулярной главной оптической оси системы. Проведем из точки A луч, параллельный главной оптической оси линз. После преломления в первой линзе он пройдет через фокус первой линзы, а значит, и через фокус второй. Следовательно, после преломления во второй линзе луч пойдет опять параллельно главной оптической оси. Изображение A' точки A будет лежать на этом луче L_2M (или его продолжении; рис. 17), а точка B', очевидно, лежит на оптической оси (для построения изображения использован еще один луч — AF_1). Размер изображения $A'B'$ равен расстоянию между прямой L_2M и главной оптической осью, т. е. длине отрезка O_2L_2. Треугольники L_1O_1F и L_2O_2F подобны с коэффициентом подобия F_1/F_2. Следовательно,

$$A'B'=O_2L_2=O_1L_1\frac{F_2}{F_1}=AB\frac{F_2}{F_1},$$

т. е. увеличение равно $\Gamma=F_2/F_1$ и не зависит от положения предмета.

Задача 8. *За рассеивающей линзой с фокусным расстоянием $F=11$ см расположено вогнутое зеркало. Эта система отражает лучи, параллельные главной оптической оси линзы, в обратном направлении. Определите радиус кривизны зеркала, если расстояние между линзой и зеркалом $d=6$ см (рис. 18).*

После преломления в рассеивающей линзе луч, параллельный главной оптической оси, пойдет так, что его продолжение будет проходить через фокус линзы. После отражения от зеркала луч пойдет точно в обратном направлении и после второго преломления в линзе будет параллельным ее оптической оси, если падающий на зеркало луч перпендикулярен его поверхности, т. е. идет по радиусу зеркала. Это означает, что фокус линзы должен совпадать с центром кривизны зеркала, поэтому

$$R=F+d=17\text{ см}.$$

Упражнения

1. Дан ход луча в тонкой рассеивающей линзе. Постройте ход луча BC (рис. 19).

2. Постройте изображение стрелки AB, пересекающей фокальную плоскость тонкой собирающей линзы (рис. 20).

3. Система из двух тонких линз, собирающей и рассеивающей, с одинаковым по модулю фокусными расстояниями F дает изображение точечного источника света. Главные оптические оси линз совпадают. Расстояние между линзами $L=3F$. Источник расположен на главной оптической оси на расстоянии $d=2F$ перед собирающей линзой. На сколько и в какую сторону сместится изображение источника, если ближайшую к источнику (собирающую) линзу сместить перпендикулярно оптической оси на $x=2$ см?

4. За положительной линзой с фокусным расстоянием $F=24$ см на расстоянии $d=4$ см расположено выпуклое сферическое зеркало. Эта система отражает лучи, параллельные главной оптической оси линзы, точно в обратном направлении. Определите радиус кривизны зеркала.

Олимпиады

XVII Всероссийская олимпиада школьников

В этом году заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике проходил в Петрозаводске, Белгороде, Уфе и Новосибирске.

Математика

Как обычно, состязания проводились в два дня, каждый день участникам предлагались 4 задачи. После формулировки каждой задачи в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное ее решение.

9 класс

Первый день

1. Найдите геометрическое место вершин парабол, имеющих уравнения $y=-x^2+bx+c$ и касающихся параболы $y=x^2$. (6)

2. На диаметре AB полуокружности с центром O взята точка C, отличная от A, B и O. Из точки C под равными углами к AB проведены лучи, пересекающие полуокружность в точках D и E. В точке D к лучу DC проведен перпендикуляр, вторично пересекающий полуокружность в точке K. Докажите, что если $K\neq E$, то KE и AB параллельны. (8)

3. Даны три различных положительных числа. Докажите, что их можно обозначить через a, b и c так, что будет выполняться неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>\frac{a}{c}+\frac{c}{a}. \qquad (10)$$

4. На крайней левой клетке полоски $1\times\times100$, расчерченной на клетки 1×1, стоит фишка. Два игрока поочередно перемещают фишку, причем за один ход разрешается перемещение фишки на 1, 10 или 11 клеток вправо. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер? (12)

Второй день

5. Существуют ли два целых числа, сумма кубов которых равна 1991? (6)

6. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и M, на диагонали BD — точки P и T так, что $AK=MC=$ $=\frac{1}{4}AC$, $BP=TD=\frac{1}{4}BD$. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AD и BC, проходит через середины отрезков PM и KT. (8)

7. Деревянная доска $n\times n$ поделена на клетки 1×1. Двое игроков поочередно делают пропилы лобзиком по следующим правилам: от края доски или от любого узла сетки, до которого уже сделан пропил, делается пропил единичной длины вдоль линии сетки. Проигрывает тот, после пропила которого доска распадается. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер? (10)

8. Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ больше 1 и $|a_{k+1}-a_k|<1$ при $1\leqslant k\leqslant n-1$. Докажите, что сумма $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$ меньше $2n-1$. (12)

10 класс

Первый день

1. Найдите все натуральные числа p и q, такие, что уравнение $x^2-pqx+p+q=0$ имеет целые корни. (6)

2. Отрезки, соединяющие точку K с вершинами A и D прямоугольника $ABCD$, пересекают сторону BC. Перпендкуляры, опущенные из B и C на прямые DK и AK соответственно, пересекаются в точке M. Докажите, что если $M\neq K$, то MK и AD перпендикулярны. (8)

3. Город в форме многоугольника разделен улицами на кварталы-многоугольники. В вершинах многоугольников находятся площади. Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. На каждой улице введено одностороннее движение так, что: а) на каждую площадь можно приехать; б) с каждой площади можно уехать; в) весь город можно объехать вдоль его границы.

Докажите, что в городе имеется квартал, который можно объехать по улицам, его ограничивающим. (10)

4. Таблица с 6 столбцами и n строками, $n\geqslant2$, заполнена нулями и единицами так, что все ее строки различны и вместе с любыми двумя строками $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_6)$ в ней содержится и строка $(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_6b_6)$. Докажите, что в каком-то ее столбце не менее половины нулей. (12)

Второй день

5. В каждой вершине куба сидит муха. Одновременно все мухи взлетают и снова садятся в каком-то порядке по одной в каждую вершину. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положениях располагаются в вершинах равных треугольников. (5)

6. Дан прямоугольник размерами 11×12. Докажите, что этот прямоугольник:

а) можно замостить неперекрывающимися прямоугольниками размерами 1×6 и 1×7, общее количество которых равно двадцати; (1)

б) нельзя замостить девятнадцатью такими прямоугольниками. (8)

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=12, \\ 5y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=4. \end{cases} \qquad (10)$$

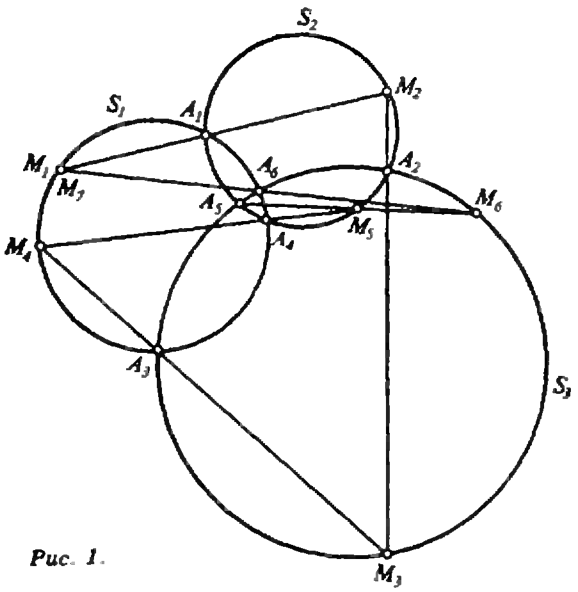


Рис. 1.

8. Делегаты съезда должны выбрать комиссию. Каждый делегат выбирает 10 человек из списка кандидатов. Назовем комиссию «хорошей» для делегата, если хотя бы один выбранный делегатом человек входит в комиссию. Оказалось, что для любых шести делегатов найдется комиссия из двух человек, которая является «хорошей». Докажите, что можно выбрать комиссию из 10 человек, «хорошую» для всех делегатов. (12)

11 класс

Первый день

1. Известно, что многочлен $2x^3-60x^2+ax$ принимает в трех последовательных целых точках три последовательные (в том же порядке) целые значения. Найдите эти значения. (6)

2. Высоты AD, BE, CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что площади четырехугольников $AEHF$ и $HECD$ равны. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. (8)

3. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c). \qquad (10)$$

4. Из n^3 единичных кубиков составлен куб с ребром n, n — четное число. Произвольным образом отмечены $\frac{3n^2}{2}$ единичных кубиков. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник, вершины которого лежат в центрах отмеченных кубиков и катеты которого параллельны ребрам куба. (12)

Второй день

5. Докажите, что при всех x и y справедливо неравенство

$$\cos x+\cos y+2\cos(x+y)\geqslant -\frac{9}{4}. \qquad (6)$$

6. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_4, S_2 и S_3 — в точках A_2 и A_5, S_3 и S_1 — в точках A_3 и A_6. Ломаная $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7$ такова, что каждая прямая M_kM_{k+1} содержит точку A_k, а точки M_k и M_{k+1} принадлежат окружностям, пересекающимся в этой точке, и точка M_{k+1} отлична от A_{k+1} (см., например, рис. 1). Докажите, что точки M_1 и M_7 совпадают. (9)

7. В пространстве даны три прямые a, b и c. На прямых a, b, c, a, b, c, a взяты соответственно точки T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 так, что $T_0T_1\perp b$, $T_1T_2\perp c$, $T_2T_3\perp a$, $T_3T_4\perp b$, $T_4T_5\perp c$ и $T_5T_6\perp a$. Оказалось, что точки T_0 и T_6 совпадают. Докажите, что точки T_0 и T_3 также совпадают. (9)

8. Имеется n^2+n уголков, каждый из которых составлен из двух металлических стержней длины 1, спаянных под прямым углом. Из этих уголков образована плоская квадратная решетка, состоящая из n^2 клеток 1×1. Докажите, что количество уголков, стороны которых направлены из вершины уголка вверх и вправо, равно количеству уголков, стороны которых направлены из вершины уголка вниз и влево. (12)

Публикацию подготовили
Н. Агаханов, Л. Купцов, С. Резниченко

Физика

В олимпиаде по физике приняло участие почти триста учеников 9—11 классов — победителей областных, краевых, республиканских (республик, входящих в состав Российской Федерации) олимпиад, конкурса «Кванта» и призеров предыдущей Всероссийской олимпиады.

По сложившейся традиции олимпиада включала в себя два тура. Теоретический тур прошел 26 марта. В каждом классе было предложено четыре задачи, на решение которых отводилось четыре часа*)

Теоретический тур

9 класс

1. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда массой M при температуре $T=0$ °С и прочно прикрепили его ко дну (рис. 2). Затем залили этот лед водой такой же массы M. Вода полностью покрыла лед и достигла уровня $H=20$ см. Определите, какова была температура этой воды, если после установления теплового равновесия уровень ее опустился на $h=0.4$ см. Плотность воды и льда равны соответственно $\rho_в=1000$ кг/м^3 и $\rho_л=920$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

2. Доска массой $M=120$ кг, длиной $L=5$ м и площадью поперечного сечения $S=300$ см^2

*) Часть задач теоретического тура публикуется в «Задачнике «Кванта».

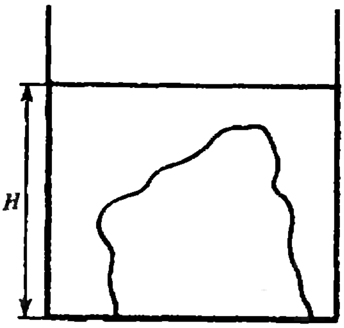


Рис. 2.

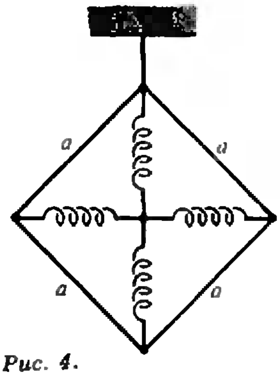


Рис. 4.

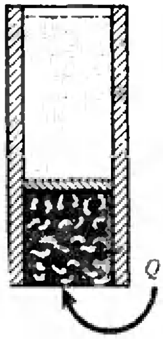


Рис. 5.

одним концом опущена в воду (рис. 3). Через другой конец проходит неподвижная горизонтальная ось A, вокруг которой доска может свободно вращаться в плоскости, перпендикулярной оси. На каком максимальном расстоянии от верхнего конца доски может стоять на ней человек массой $m=60$ кг, не замочив ног?

3. Машина скорой помощи, спешащая к больному с сердечным приступом, стоит у самого железнодорожного переезда, который станет свободным только через $t_0=29$ с из-за проходящего мимо поезда. Через какое минимальное время, считая от момента освобождения поездом переезда, врач может прибыть к больному? Расстояние от переезда до больного $l=330$ м, масса машины $m=1,8\cdot10^3$ кг. Считать, что максимальные значения силы тяги и силы торможения у машины не зависят от скорости, численно одинаковы и равны $F=1,8$ кН.

4. Посередине большой круглой комнаты с высоким потолком стоит на ножках круглый стол радиусом $r=55$ см и высотой $H=1$ м. С какой минимальной скоростью надо бросить небольшой шарик с поверхности пола, чтобы он попал в центр стола, не ударяясь о стол перед этим? Какой будет ответ, если радиус комнаты станет $R=85$ см? Возможные удары шарика о стену считать упругими.

10 класс

1. Квадратная рамка, составленная из четырех одинаковых шарнирно скрепленных невесомых стержней длиной a каждый, подвешена за один из углов (рис. 4). К углам рамки прикреплены четыре одинаковые невесомые пружины жесткостью k, скрепленные друг с другом. В исходном состоянии пружины не деформированы. К нижнему углу рамки подвешивают груз массой m. Определите угол между стержнями в точке подвеса рамки при условии ее равновесия.

2. В вертикальном теплоизолированном цилиндре длиной 15 м и диаметром 20 см под тонким невесомым теплонепроницаемым поршнем находится 10 молей идеального одноатомного газа. На поршень до верхнего среза трубы налита вода, высота столба воды 10 м (рис. 5). Какое минимальное количество теплоты необходимо подвести к газу, чтобы поршень вытолкнул из трубы всю воду? До какой максимальной температуры в процессе вытеснения воды нагреется газ?

3. Определите сопротивление бесконечной проволочной сетки, изображенной на рисунке 6, между точками A и B, если сопротивление каждого отрезка проволоки равно r.

4. Человек массой 80 кг стоит в центре квадратного плота. Размеры плота $2\times2\times0,3$ м, плотность материала, из которого он изготовлен, 900 кг/м^3. Человек начинает идти параллельно одной из его сторон. На какое расстояние от центра плота он отойдет в тот момент, когда вода начнет заливать плот?

11 класс

1. Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гоманна — Цандера (перигелий этой орбиты находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Марса). Найдите время такого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по орбите такой же формы. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_З=365,25$ суток, Марса — $T_М=$

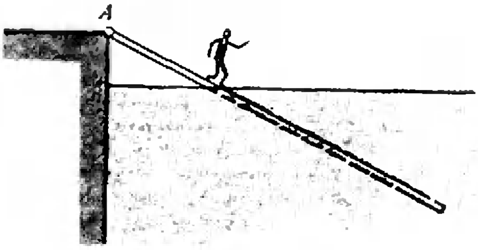


Рис. 3.

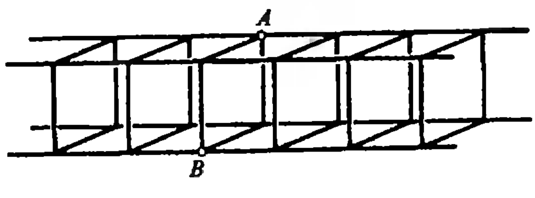


Рис. 6.

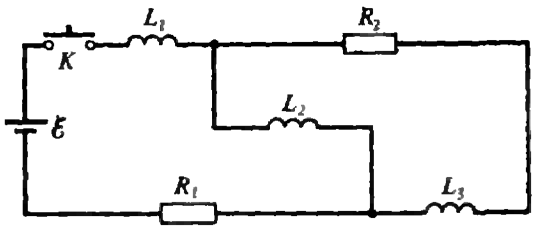


Рис. 7.

$=687$ суток. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

2. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда массой M и прочно прикрепили его ко дну. Затем залили этот лед водой такой же массы M и температуры $T_в = 15\ °C$. Вода полностью покрыла лед, и ее уровень оказался на высоте $H=20$ см от дна сосуда. Определите, какова была начальная температура льда, если после установления теплового равновесия уровень воды поднялся на $h=0{,}4$ см (при этом вода по-прежнему полностью покрывает лед). Плотности воды и льда равны соответственно $\rho_в=1000$ кг/м^3 и $\rho_л=920$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c_в=4200$ Дж/(кг·К), льда — $c_л=2500$ Дж/(кг×К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

3. Найдите, какой заряд протечет через сопротивление R_2 после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рисунке 7. Все элементы схемы считать идеальными, величины $\mathcal{E}$, R_1, R_2, L_1, L_2, L_3 — известными. (В некоторых зонах предлагалась другая задача по электричеству.)

4. Если объектив фотоаппарата, имеющий фокусное расстояние $f=58$ мм и наведенный на бесконечность, направить на Солнце, то при диаметре входного отверстия объектива (диафрагмы) больше, чем $d=11$ мм, шторка затвора фотоаппарата прожигается. На какое расстояние должен быть наведен этот же объектив фотоаппарата с существенно бо́льшим диаметром диафрагмы, чтобы можно было исключить возможность прожигания шторки при направлении объектива на Солнце? Считать, что при наведении на бесконечность шторка затвора находится в фокальной плоскости. Видимый с Земли угловой размер Солнца равен $\alpha=9{,}3\times10^{-3}$ рад.

В тот же день, 26 марта, работы участников были зашифрованы, и жюри приступило к их проверке. По традиции, жюри в каждом городе состояло главным образом из представителей местных университетов, институтов, НИИ, школ. Вместе с ними в жюри работали и представители Центрального всероссийского оргкомитета, т. е. те, кто ежегодно составляет комплекты задач для заключительного этапа олимпиады. Надо отметить очень хорошую работу в жюри участников различных олимпиад прошлых лет, а ныне — студентов вузов. Пользуясь случаем, мы приглашаем принять в ней участие и выпускников этого года.

Работы внимательно проверялись членами жюри не менее двух раз. При этом одну и ту же задачу у всех участников проверяла одна и та же бригада жюри (как правило, 2—3 человека). Таким образом достигается максимальное единообразие критериев выставления баллов. Правильно решенная задача, независимо от способа решения, оценивалась по 10 баллов.

В ходе проверки выяснилось, что для девятиклассников сравнительно простыми оказались первые две задачи. В третьей лишь часть участников догадалась, что машине целесообразнее сначала отъехать от переезда. Правильную идею решения четвертой задачи высказало еще меньше школьников, и лишь несколько человек сумели правильно проанализировать вторую часть задачи, используя принцип зеркального отражения.

Печально, но в очень многих работах встречались арифметические ошибки. Не обошлось и без курьезов. Так, в нескольких (к сожалению неверных) решениях второй задачи «человеку идущему по доске», рекомендовалось надеть сапоги (в одном случае — галоши). А в одном из решений третьей задачи предлагалось врачу сразу же выйти из машины и, не дожидаясь открытия переезда, бегом устремиться к больному: «Мало того, что переезд почему-то закрыт перед скорой помощью и его открытия нужно ждать почти полминуты, так ведь еще и машина может заглохнуть от того, что водитель перенервничает!» В решении, правда, не указано, как врачу следует «преодолевать» движущийся поезд.

Наиболее сложным теоретический тур оказался для десятиклассников. Удивительно, но четвертую задачу полностью не решил никто, и лишь три человека получили приблизительно правильный ответ. Остальные три задачи решили от 15 до 60 процентов всех школьников.

Для одиннадцатиклассников наиболее простыми были вторая задача и половина первой. В то же время вторая, чисто кинематическая, часть первой задачи — о времени ожидания старта с Марса в обратный путь — вызвала большие затруднения. Немалые трудности вызвала и третья, по своему характеру типично олимпиадная задача. Четвертая задача, условно названная школьниками «про дырку в фокальной плоскости», по их мнению, является лучшей задачей олимпиады, хотя и ее решили немногие. А один из них даже выразил в своей работе благодарность составителям задач: «Теперь,— написал он в конце,— буду гораздо осторожнее обращаться с фотоаппаратом в солнечную погоду».

На следующий день проходил экспериментальный тур. Немало хлопот доставила его подготовка организаторам — практически везде «на местах» возникли сложности с оборудованием. Не так уж просто оказалось в наше время найти по 20—30 комплектов необходимых приборов. Но, к чести оргкомитетов, все проблемы были решены, и 27 марта школьники приступили к выполнению эксперимента. На решение двух задач им давалось четыре часа.

Экспериментальный тур

9 класс

1. В закрытом чехле находится пружина, часть витков которой перевязана нитью. Определите, какая часть витков перевязана.

Оборудование: пружина в закрытом чехле, штатив с муфтой и лапкой, набор грузов по 100 г, гиря массой 50 г, линейка.

2. Исследуйте в комнате процесс остывания воды, нагретой до 60 °С. Оцените часть количества теплоты, уносимую парами воды, по отношению к общей теплоотдаче.

Оборудование: внутренний и внешний стаканы калориметра, сосуд с водой, нагретой до 60 °С (общий на класс), листы плотной бумаги, термометр, часы.

10 класс

1. Исследуя колебания данной вам пластины с отверстиями, определите с максимально возможной точностью положение ее центра масс.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, пластина с отверстиями, просверленными вдоль прямой, проходящей через центр масс пластины, секундомер (часы с секундной стрелкой), линейка, гвоздь.

2. Исследуйте зависимость величины сопротивления данной вам лампочки от напряжения на ней. Объясните полученную зависимость.

Оборудование: источник тока, реостат, лампочка, ключ, амперметр, вольтметр, соединительные провода, миллиметровая бумага.

11 класс

1. Исследуйте зависимость критической силы, которую необходимо приложить к центру деформированной деревянной линейки (рис. 8), от ее начального прогиба. (Под критической силой следует понимать минимальную силу, при которой происходит резкое изменение формы линейки — потеря устойчивости.)

Оборудование: штатив с упором, динамометр, две линейки.

2. Определите показатель преломления выданной жидкости.

Оборудование: сосуд с жидкостью и пустой сосуд (оба непрозрачные), металлическая линейка.

Решение первой задачи для 9 класса предполагало построение графика зависимости удлинения пружины от веса подвешенных к ней грузов. Получаемый график имел два прямолинейных участка: на одном из них «работала» вся пружина, а на другом — лишь неперевязанные ее витки. По различию эффективных коэффициентов жесткости можно было найти, какая часть витков не перевязана. Увы, немногие справились с этой проблемой.

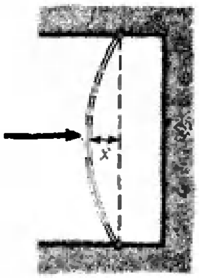


Рис. 8.

Некоторые школьники вообще засомневались в существовании нити. В частности, один из участников самокритично написал: «Если говорить честно, то я не знаю, как решать эту задачу. В школе мы этого явно не проходили. При помощи грузов и линейки можно, по-моему, измерить только жесткость пружины. Вероятно, я не прав, но мне кажется, что никакой нити нет и то, что мой прибор имеет 17-й номер, абсолютно ничего не значит». В Петрозаводске, например, проверить свои догадки участники смогли сразу же после окончания тура. Жюри предложило им «ликвидировать» ставший более ненужным чехол и убедиться в наличии нити.

Вторая задача требовала проведения двух экспериментов с охлаждением воды: в открытом калориметре и в калориметре, накрытом плотной бумагой. По соотношению скоростей остывания можно было оценить долю теплоты, уносимую парами. Задача оказалась несложной в идейном плане, но требовала немало времени и аккуратности. Были и предложения по улучшению постановки этой задачи. Например, А. Королев из Кинешмы предложил более эффективный метод устранения парообразования — покрыть воду в калориметре пленкой какого-либо жира.

Первую экспериментальную задачу для 10 класса следует признать явно неудачной. Вообще, всегда вызывают недоумение задачи, требующие определить что-либо существенно более сложными (и, главное, менее точными) методами, чем самые известные, традиционные. Именно поэтому многие участники сначала искали центр тяжести, уравновешивая пластину на каком-либо острие (например, на гвозде), точность при этом получалась не хуже 1 мм, а потом лишь проверяли этот результат экспериментами с колебаниями. Конечно, немногие прямо написали об этом. И, видимо, зря. Жюри с пониманием относилось к такому порядку проведения экспериментов, если, конечно, он был аргументирован.

Вторая задача была достаточно традиционной. Здесь важно было правильно и аккуратно провести эксперименты, грамотно объяснить полученные данные (в частности, причину нелинейности вольт-амперной характеристики).

Первая задача для 11 класса носила исследовательский характер. В техническом плане здесь важно было правильно собрать экспериментальную установку — так, чтобы свести к минимуму влияние упругости штатива и других деталей крепления линейки. При пренебрежении этим в опытах измерялись совсем не те величины. Грамотно снять зависимость и построить график (с учетом погрешностей) — вторая часть работы. Ну и третья — осмыслить результат, попытаться предложить какую-либо простую теоретическую модель системы. Вообще, разумная зависимость получалась у многих. Жюри считало правильными все решения, где правильным путем получены ха-

рактерные нелинейные зависимости. (Теоретически должна была получиться зависимость $F \sim x^3$. Экспериментально она получалась для малых x, если создать очень жесткую внешнюю конструкцию. При нежестких конструкциях преобладала зависимость $F \sim x^2$ — именно из-за упругости систем закрепления линейки — штатива, лапок и т. п.)

Вторая задача — простор для импровизаций. Существует очень много методов измерения коэффициента преломления жидкости, многие из них продемонстрировали участники. Лучшим был признан метод опускания металлической линейки в жидкость и одновременного наблюдения преломленных и отраженных лучей.

Что касается оценки экспериментальных задач в целом, то, как всегда на Российских олимпиадах, главными составляющими их оценки были правильный и обоснованный выбор метода проведения, качественное конструирование экспериментальной установки, грамотное выполнение эксперимента, проведение серии опытов для получения более достоверных результатов, правильная обработка результатов, оценка погрешностей (чем «старше» класс, тем больше это ценилось), объяснение полученных результатов.

На следующий день, после расшифровки работ, каждый участник (причем не только тот, кто хотел апеллировать) мог ознакомиться с оценкой своей работы, побеседовать непосредственно с проверявшими задачи членами жюри, а порой даже с авторами этих задач.

На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы, грамоты и призы — как традиционные, так и специальные. За особо оригинальные решения жюри присудило особые призы: М. Кузьменко (Ухта) получил спецприз «За лингвистический анализ условий задач», С. Макаров (Усинск) — «За лучшее выполнение мысленного эксперимента», С. Таймаиов (Раменское) — «За народнохозяйственное осмысление экспериментальной задачи», а А. Королев (Кинешма) — «За открытие инвариантности физических законов относительно номера прибора».

Специальными грамотами Министерства образования Российской Федерации были награждены учителя, подготовившие призеров олимпиады. Следует также отметить школы, из которых сразу несколько учеников показали высокие результаты. Это с. ш. № 73 г. Тулы, ФТ лицей № 1 г. Саратова, с. ш. № 23 г. Владивостока, с. ш. № 25 г. Новосибирска, с. ш. № 40 г. Нижнего Новгорода, гимназия г. Смоленска.

Но, конечно, главными призами победителям стали путевки на XXV Всесоюзную олимпиаду, которая в этом году проходила в Ташкенте.

М. Гаврилов

V Иберо-американская математическая олимпиада

Иберо-американские страны — те, где население говорит по-испански или по-португальски. Олимпиада проводилась в Мадриде в сентябре 1990 года. Она проходила по регламенту международной олимпиады, а именно: на решение задач в каждый из дней давалось по

(Окончание см. на с. 65)

Алгоритмика простоты

Простые близнецы

Б. ТАРАСЕНКО

Нелегкий вопрос-то,
Но верь одному:
Все сложно и просто,
Считай, по уму!

В природе близнецами называют объекты, очень похожие друг на друга, отличающиеся едва заметным «чуть-чуть». В математике для простых чисел это «чуть-чуть» определено точно, постоянно и равно двум. Вот первые математические «двойники»: (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61), (71; 73), (101; 103), (107; 109) и так далее. Пара пар (3; 5), (5; 7) уникальна — она единственная из близнецов имеет общий элемент (единственность легко доказать, используя делимость на три).

Много ли простых чисел-близнецов? В первом десятке их две пары (а простых чисел — четыре), в первой сотне — восемь (при 25 простых числах). Существует гипотеза о том, что множество пар простых чисел-близнецов бесконечно. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута. Однако встречаются простые числа-близнецы явно реже просто простых чисел. Но насколько реже?

Чувствуете, в воздухе уже витает специфический дух козленка из известного мультфильма, который умел и хотел (с пользой для практики!) все сосчитать? Вы догадались. Мы действительно хотим дать вам в руки очередной программный инструмент: нарастающий счетный генератор простых числовых близнецов.

Тема близости или даже полной схожести в нем возникает не раз. Основная цель — поиск пар простых чисел, значит, программа должна дважды проводить проверку на простоту. В текстах песен в таких случаях экономят бумагу, приводя фрагмент один раз, а затем ссылаются на него одним словом: «припев». Например:

Было двенадцать разбойников,
Был Кудеяр-атаман,
Много разбойники пролили
Крови честных христиан.

Припев:

Господу богу помолимся,
Древнюю быль возвестим,
Нам в Соловках ее сказывал
Инок, честной Питирим.

Много богатства награбили,
Жили в дремучем лесу.
Вождь-Кудеяр из-под Киева
Вывез девицу-красу.

Припев

В программировании «припев» называется *подпрограммой*. При обращении к ней из основной программы этот «припев» исполняется, а затем управление передается обратно основной программе. Вот и мы сделали программу в виде «песни с припевом» — подпрограммой (шаги 33—55). Ее главную часть образует соответствующим образом видоизмененный наш серийный программный инструмент № 1. Возможность сделать две другие похожие части еще одной подпрограммой предоставляется читателям. Здесь могут получиться так называемые вложенные подпрограммы — «припев» к «припеву», а можно сделать одну удлиненную подпрограмму. Ожидаемый выигрыш от операции — три командных шага или более.

Еще можно выиграть шажок на командах индикации. Как — читатели знают. В остальном принципиальных новшеств нет.

Мы уже делали «сечения по сотням» после каждой степени десяти для простых. Не мудрствуя лукаво, сделаем то же самое для близнецов. Здесь после степени десяти в скобках указывается количество пар, затем

Программа № 5. Счетный нарастающий генератор прростых числовых близнецов

00		Х→П	6	46	/+	Засылка из РгХ в Рг6 стартового нечетного числа
01		0		00	/+	Константа ноль
02		С/П		50	/+	Стоп—индикация нуля, приглашение к вводу номера
03	F	Х=0		57	/+	Содержимое РгХ не равно нулю?
04		02		02	/+	НЕТ, РгХ=0, переход на шаг 02 (барьер против ввода нуля)
05		Х→П	4	44	/+	ДА, введен ненулевой номер, засылка его в Рг4
06		БП		51	/+	Безусловный переход
07		10		10	/+	на шаг 10
08	К	П→Х	6	Г6	/+	Добавление 1 к испытуемому числу в Рг6
09	К	П→Х	6	Г6	/+	Добавление еще 1 к испытуемому числу
10		ПП		53	/+	Переход на подпрограмму
11		33		33	/+	по адресу 33 для проверки простоты нечетн. числа
12	F	Х≠0		57	/+	Содержимое РгХ не равно нулю?
13		08		08	/+	Нет, РгХ=0, испытуемое число не простое, переход на шаг 08
14		П→Х	6	66	/+	Да, РгХ≠0, испытуемое число простое, вызов его из Рг6 в РгХ
15		Х→П	а	4—	/+	Фиксация первого простого в РгА
16	К	П→Х	6	Г6	/+	Добавление 1 к испытуемому числу в Рг6
17	К	П→Х	6	Г6	/+	Добавление еще 1 к испытуемому числу
18		ПП		53	/+	Переход на подпрограмму
19		33		33	/+	по адресу 33 для проверки простоты числа в Рг6
20	F	Х≠0		57	/+	Содержимое РгХ не равно нулю?
21		08		08	/+	Нет, РгХ=0, испытуемое число не простое, переход на шаг 08
22		П→Х	6	66	/+	Да, РгХ=0, испытуемое число простое, вызов его из Рг6 в РгХ
23		Х→П	b	4L	/+	Фиксация второго простого в РгВ
24		П→Х	а	6—	/+	Вызов младшего близнеца из РгА в РгХ
25		С/П		50	/+	Стоп—индикация младшего числа—близнеца
26		П→Х	b	6L	/+	Вызов старшего близнеца из РгВ в РгХ
27		С/П		50	/+	Стоп—индикация старшего числа—близнеца
28		П→Х	4	64	/+	Вызов в РгХ содержимого счетчика порядкового номера пары
29		С/П		50	/+	Стоп—индикация порядкового номера пары близнецов
30	К	П→Х	4	Г4	/+	Приращение на 1 счетчика Рг4 порядковых номеров
31		БП		51	/+	Безусловный переход
32		08		08	/+	на шаг 08
33		1		01	/+	Начало подпрограммы, константа 1
34		Х→П	5	45	/+	Засылка 1 в Рг5=Д, Д — делитель
35	К	П→Х	5	Г5	/+	Добавление 1 в счетчик Рг5
36	К	П→Х	5	Г5	/+	Добавление еще 1 в счетчик Рг5
37		П→Х	6	66	/+	Вызов в РгХ текущего испытуемого числа И из Рг6
38		П→Х	5	65	/+	Вызов в РгХ текущего делителя Д из Рг5, И идет в РгХ
39		÷		13	/+	ЧАСТН=И/Д
40		Х→П	9	49	/+	Засылка ЧАСТН в Рг9
41	К	П→Х	9	Г9	/+	К=целая часть от ЧАСТН
42		П→Х	6	66	/+	Вызов И в РгХ
43		П→Х	9	69	/+	Вызов К в РгХ; И перемещается в РгY
44		П→Х	5	65	/+	Вызов Д в РгХ; РгY=К; РгZ=И
45		×		12	/+	Д×К
46		—		11	/+	ОСТ=И—К×Д, остаток от деления
47	F	Х≠0		57	/+	ОСТ≠0?
48		55		55	/+	НЕТ (т. е. ОСТ=0), выход из подпрограммы с нулем на шаг 55
49		П→Х	9	69	/+	ДА (т. е. ОСТ≠0), вызов целого ЧАСТН
50		П→Х	5	65	/+	Вызов Д из Рг5 в РгХ
51		—	11	11	/+	РгХ=ЧАСТН—Д
52	F	Х<0		5С	/+	ЧАСТН—Д<0?
53		35		35	/+	НЕТ, переход на шаг 35 к новому значению Д
54		П→Х	6	66	/+	ДА (множество Д исчерпано), вызов И в РгХ
55		В/О		52	/+	Возврат в основную программу с нулем или простым числом

приводятся сами пары (для краткости у чисел, больших сотни, крайняя левая единица и все нули подряд правее нее опущены), а затем после точки с запятой — пара близнецов, выходящих за пределы ста.

10^0(8): (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61), (71; 73); (101; 103).

10^1(8): (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61), (71; 73), (1; 3), (7, 9); (137, 139).

$10^2(7)$: (1; 3), (7; 9), (37; 39), (49; 51), (79; 81), (91; 93), (97; 99); (227; 229).

$10^3(5)$: (19; 21), (31; 33), (49; 51), (61; 63), (91; 93); (151; 153).

$10^4(4)$: (7; 9), (37; 39), (67; 69), (91; 93); (139; 141).

$10^5(0)$: (151; 153).

$10^6(1)$: (37; 39); (211; 213).

$10^7(0)$: (139; 141).

$10^8(1)$: (37; 39); (167; 169).

Перейдем непосредственно к программе. Она работает на МК-61, пригодно и все программно совместимое семейство. Для ее запуска после ввода программы в ПМК необходимо вручную выполнить следующие операции.

Нажать клавишу В/О, набрать начальное нечетное целое положительное число, не меньшее 5. Затем нажать клавишу С/П. На индикаторе появится ноль. Это — приглашение к набору начального значения счетчика порядковых номеров близнецов. Можно набрать единицу. Если же вам точно известен порядковый номер стартовой пары близнецов, то в качестве начального нечетного числа набирайте меньший из близнецов, а потом, после С/П и появления нуля,— этот известный порядковый номер.

Затем нажимаете клавишу С/П, и, когда ПМК остановится, на индикаторе будет первое из чисел-близнецов. После нажатия клавиши С/П появится второе, а после следующего С/П — относительный порядковый номер этой пары близнецов. Новые нажатия клавиши С/П приведут к появлению новых пар близнецов и так далее.

(Начало см. на с. 62)

4,5 часа, каждая задача оценивалась в 10 баллов. После номера задачи в скобках указана страна, ее предложившая.

Первый день

1 (Аргентина). Пусть f — функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, удовлетворяет двум следующим условиям:

1) если $n=2^i-1$ для $i=0,1,2,...$, то $f(n)=0$,

2) если $n\neq 2^i-1$ для $i=0,1,2,...$, то $f(n+1)=f(n)-1$.

а) Покажите, что для любого целого числа $n\geqslant 0$ существует целое число $k\geqslant 0$ такое, что $f(n)+n=2^k-1$.

б) Найдите $f(2^{1990})$.

2 (Колумбия). В треугольнике ABC точка I является центром вписанной в него окружности, а D, E и F — точки касания этой окружности со сторонами BC, CA и AB соответственно. Пусть P — другая точка пересечения прямой AD со вписанной окружностью, а M — середина отрезка EF. Покажите, что точки P, I, M и D лежат на одной окружности или прямой.

3 (Испания). Пусть $f(x)=(x+b)^2-c$ — многочлен, у которого b и c — целые. Докажите, что

а) если p — простое число, причем c делится на p, но не делится на p^2, то для всех целых n число $f(n)$ не делится на p^2,

б) если q — простое число, не равное 2, такое, что c не делится на q, а $f(n)$ делится на q при некотором целом n, тогда для любого целого числа r найдется целое число n' такое, что $f(n')$ делится на q^r.

Второй день

4 (Венесуэла). Пусть AB — диаметр окружности c_1. Прямая t касается этой окружности в точке B. Пусть M — произвольная точка окружности c_1, отличная от A и B. Построим окружность c_2, касающуюся окружности c_1 в точке M и прямой t.

а) Найдите точку P касания окружности c_2 с прямой t, а также геометрическое место центров окружностей c_2, если точка M будет переменной.

б) Покажите, что существует окружность, ортогональная ко всем окружностям c_2.

5 (Мексика). Пусть A и B — противоположные вершины доски размером $n\times n$, разделенной на единичные квадраты ($n\geqslant 1$). В каждом из квадратов проведена диагональ, параллельная прямой AB, в результате чего доска разбивается на $2n^2$ равных треугольников. Фишка движется вдоль отрезков на этой доске от A до B, при прохождении стороны треугольника в него кладется зерно. Каждый отрезок проходится не более одного раза. По окончании пути оказалось, что в каждом из $2n^2$ треугольников находится ровно по 2 зерна. При каких значениях n возможна такая ситуация?

6 (Уругвай). Пусть $f(x)$ — многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами. Покажите, что если график функции $f(x)$ касается оси абсцисс, то все три корня многочлена $f(x)$ рациональны.

Публикацию подготовил А. Савин

Из истории науки

Философская беседа — украшение обеда

В 1990 году в серии «Литературные памятники» вышла книга Плутарха «Застольные беседы». Известный всем со школьной скамьи великий историк античности был, оказывается, чрезвычайно любознательным человеком: он интересовался всем на свете. Вот темы некоторых из бесед, которые вели за пиршественным столом Плутарх и его друзья: «Почему люди старшего возраста лучше разбирают буквы издали», «Древнейшее ли из гимнастических состязаний борьба», «Горяч или холоден по своей природе плющ», «Почему Гомер называет яблоню «яснoплодной», а Эмпедокл яблоки — «пышносочными», «Какой смысл вложил Платон в утверждение, что бог всегда остается геометром», «По какой причине различают три разряда мелодий»... Мы нашли в этом сочинении главы и физического, и математического содержания. Многие рассуждения восхищают своей глубиной, некоторые же — просто очень забавны: древние были жизнерадостными людьми и за обедом не занудствовали.

Акварель великого русского художника М. А. Врубеля (1856—1910) «Пирующие римляне».

По какой причине зачерпнутая в колодце вода, если оставить ее на ночь в воздухе того же колодца, становится холоднее

Участники беседы: приезжий гость и Плутарх

Среди гостей был приезжий, большой любитель холодного питья, и наши рабы приготовили для него особо охлажденную воду: подняв из колодца ведро воды, они оставили это ведро на ночь подвешенным в том же колодце так, что оно не касалось поверхности воды, и поданная к обеду вода из этого ведра была холоднее свежезачерпнутой. Приезжий был человек с филологическим образованием. Он сказал, что заимствовал это у Аристотеля, который приводит и соответствующее объяснение. Заключается оно в том, что вода, предварительно согретая, после остывания оказывается холоднее прежнего.

На этом основано приготовление воды для царей: ее нагревают до вскипания, а затем сосуд с этой водой обкладывают большим количеством снега, и вода сильно охлаждается. Так и наше тело после горячей ванны больше прохлаждается: разгоряченное, оно разрыхляется, становится многопористым и воспринимает больше внешнего воздуха, что и производит в нем резкую перемену. Так и вода, зачерпнутая в колодце, нагревшись на воздухе, быстро охлаждается.

Мы одобрили гостя, так тщательно все запомнившего, но усомнились в правильности приведенного рассуждения. Если воздух, окружающий подвешенное ведро, холоден, то как он нагревает воду? Если же он тепел, то как вода, наоборот, охлаждается? Невозможно ведь, чтобы одно и то же от одного и того же испытывало, без какой-либо происшедшей перемены, противоположные воздействия.

Так как гость молчал, не зная, что ответить, то я сказал, что относительно воздуха нельзя сомневаться: ощущение говорит, что он холоден, и более всего — в глубине колодца. Поэтому невозможно допустить, что холодный воздух согревает воду.

Скорее, этот холодный воздух не может остудить всю толщу воды в колодце, а в небольшом количестве зачерпнутой воды производит такое действие.

По какой причине в начале обеда гостям бывает тесно, а позднее — просторно

Участники беседы: дед Ламприй и другие

После этой речи*) возник вопрос, по какой причине в начале обеда гостям бывает тесно, а позднее — просторно, тогда как, принимая во внимание объем съедаемой пищи, можно было бы ожидать обратного. Тут некоторые из нас указывали как причину этого способ возлежания за столом**): во время обеда мы занимаем такое положение, чтобы каждому было удобно протягивать правую руку к столу; а закончив еду, мы поворачиваемся боком, телу придается заостренная фигура, и мы занимаем место, измеряемое, так сказать, линейно, а не по площади. Подобно тому как игральные кости, выпав стоймя, занимают меньшую площадь, чем лежа, так и каждый из нас в начале обеда наклоняется вперед лицом к столу, а потом принимает другое положение, направляясь более вверх, чем вбок. Другие говорили о том, что подстилка на ложах постепенно уминается и освобождает больше места, подобно тому как тесная обувь мало-помалу разнашивается и, раздвигая свои поры, предоставляет ноге большую свободу движений. А наш дед, подшучивая, сказал, что на каждом пиршестве присутствуют два несхожих между собой начальника и распорядителя: сначала выступает голод, которому совершенно чужды предписания тактики, а позднее Дионис***), по общему признанию лучший из всех стратегов. «И вот, подобно тому, как Эпаминонд****), когда неопытные стратеги завели фалангу в теснины, где она пришла в замешательство, принял на себя командование и восстановил воинский строй, так и бог, носящий имена Лиэя и Хорея*****), восстановляет у нас веселый порядок и дружелюбие, после того как мы, движимые собачьим голодом, набросились друг перед другом на еду».

---

*) Обсуждался вопрос, надо ли приглашать на обед много гостей.

**) Как известно, греки и римляне не сидели за столом, как мы, а возлежали.

***) Бог вина.

****) Беотийский полководец, основатель Фиванского союза.

*****) Лиэй — «разрешитель», «освободитель»; Хорей — «хороводный», «плясовой».

Ташкентская линейка

Пять лет назад, в разгар всеобщего увлечения «Кубиком Рубика», редакция получила письмо от читателя из Ташкента В. Христинкова с описанием новой головоломки. Автор просил назвать ее «ташкентской линейкой». К сожалению, не предлагалось конструкции такой линейки, и в редакции наши «головоломщики» также не смогли придумать ничего хорошего. Отправить материал «в корзину» было жалко, поскольку эта головоломка, на наш взгляд, интересна уже тем, что является простейшей из так называемых «пермутационных» головоломок — тех, где элементы сначала переводятся в новые положения, а потом допустимыми ходами требуется вернуть их обратно.

Так и пролежало это письмо 5 лет в столе, пока мы не получили письмо из Евпатории от М. Красиловского, который предложил нам ту же головоломку, назвав ее «кубик — МК» и дав ей неожиданную реализацию.

Итак, что же такое «ташкентская линейка», она же «кубик — МК»? Пусть у нас имеется шесть квадратиков, расположенных в одну линию. Чтобы их различать, раскрасим их в разные цвета, или, еще лучше, занумеруем (рис. 1). Разрешим теперь производить следующую операцию: выберем четверку рядом стоящих квадратиков (это можно сделать тремя способами), а потом поменяем между собой местами крайние квадратики, а также средние квадратики этой четверки, что эквивалентно повороту этой части линейки на 180° (рис. 2). Вот и все. Теперь «запутаем» линейку серией таких ходов и предложим кому-либо вернуть ее в исходное положение, совершая лишь описанные нами ходы.

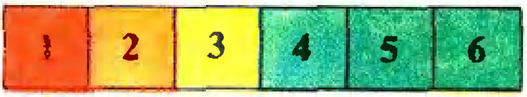


Рис. 1.

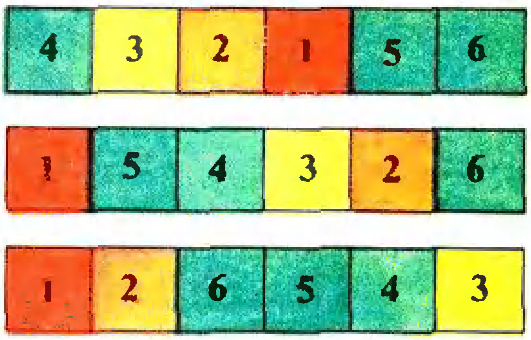


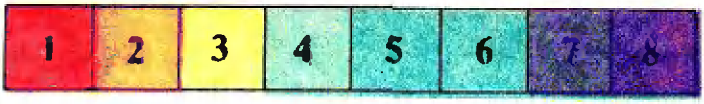
Рис. 2.

Как вы думаете, в скольких различных положениях может находиться «ташкентская линейка»? Оказывается, всего в 360 положениях, что до смешного мало по сравнению с 43252003293878272000 возможными положениями «кубика Рубика». Почему в 360? Заметим, что 6 квадратиков можно уложить в одну линию $6! = 720$ способами. Действительно, на первое место можно положить любой из 6 квадратиков, на второе — любой из оставшихся 5 (получаем $6 \cdot 5 = 30$ способов), затем любой квадратик из оставшихся четырех и т. д. Однако с помощью разрешенных операций мы сможем реализовать лишь половину возможностей. Объяснить причину этого поможет нам понятие транспозиции. Транспозицией в последовательности чисел или других элементов называется операция, в которой ровно два элемента меняются местами. Можно доказать, что если одна расстановка элементов получается из другой с помощью четного количества транспозиций, то нельзя проделать то же самое с помощью нечетного числа транспозиций, и наоборот, расстановка, полученная из другой с помощью нечетного числа транспозиций, не может быть получена из нее с помощью четного их числа.

В нашем случае каждая операция содержит ровно две транспозиции, поэтому мы можем получить только расстановки, соответствующие четному числу транспозиций, что составляет половину всех расстановок. Подумайте, почему.

А теперь подумаем об алгоритме, с помощью которого можно было бы перевести «ташкентскую линейку» в исходное положение из любого допустимого. Если вы немного поупражняетесь с линейкой, то без труда всегда сможете перевести квадратик 1 на первое место, а квадратик 2 — на второе. Посчитаем, сколько возможных позиций может получиться после

Рис. 3.



этого. На третьем месте может оказаться любой из четырех оставшихся квадратиков, на четвертом — любой из трех, итого 12 возможностей. Последние два квадратика мы можем поставить двумя способами, но полученные расстановки будут отличаться на одну транспозицию, следовательно, при одной расстановке последних двух квадратиков мы получим расстановку с четным числом транспозиций, а при другой — с нечетным. Поэтому последние два места определяются однозначно, если установлены все предыдущие. Итак, оказывается достаточным рассмотреть всего 12 расстановок. Это число мы сейчас еще уменьшим.

Выпишем эти 12 расстановок, сгруппировав их попарно:

123456	123564	123645
126543	124653	125463
124365	125346	126354
125634	126435	124536

В каждой паре расстановки отличаются всего одной операцией переворачивания последних четырех цифр. Поэтому, если мы научимся переводить в исходное положение верхнюю расстановку, то сможем сделать то же самое и с нижней. Кроме того, верхняя расстановка в первой паре — требуемая, ее уже не нужно переводить. Осталось 5 расстановок, например, верхних в оставшихся парах. Можно для них выписать процедуры перевода в исходное положение. Вот как предлагает это сделать В. Христинков:

123564	123645	124365	125346	126354
532164	632145	163425	143526	362154
534612	641235	165243	534126	364512
516432	645321	256143	536214	315462
512346	623541	253416	512634	312645
321546	621453	214356	514362	346215
345126	654123	216534	563412	345126
154326	145623	235614	562143	154326
123456	126543	234165	126543	123456
	123456	143265	123456	
		145623		
		126543		
		123456		

Итак, решение получено, но осталось еще много вопросов. Например, можно ли сократить последовательность операций, указанную В. Христинковым? Из каких позиций переход к исходной требует максимального числа операций? Чему равно это число? Сколько различных позиций может получиться за данное количество ходов? Сколько из них не может быть получено за меньшее число ходов?

Чтобы ответить на эти вопросы, конечно, хотелось бы иметь обещанную реализацию «ташкентской линейки» — «кубик — МК», придуманный М. Красиловским. Оказывается, что те, кто имеют программируемый микрокалькулятор, имеют и обещанную реализацию, поскольку требуемую перестановку цифр может осуществить на индикаторе микрокалькулятора соответствующая программа. Правда, программа М. Красиловского рассчитана на линейку не в 6 чисел, а в 8 (рис. 3), но никто не мешает, например, оставить в покое последние две цифры, а с другой стороны, любопытно решить поставленные здесь задачи и для этой более длинной линейки. Мы не приводим этой программы, содержащей 66 шагов, в надежде, что кто-нибудь предложит более экономную программу. Желаем вам успехов в этом деле. М. Красиловский предложил также еще две головоломки «кубик — МК-2» и «кубик — МК-3», в которых реализуются другие способы перестановки элементов. Попробуйте и вы создать другие типы линеек и программы их реализации на микрокалькуляторе.

В заключение хотим напомнить о головоломке «Двумерный кубик Рубика», опубликованный в № 8, 1991 г. Там ситуация очень похожа на описанную здесь — головоломка не имеет материального воплощения, а существует лишь на дисплее компьютера. В нашем случае оказалось достаточным иметь лишь микрокалькулятор.

Публикацию подготовил А. Савин


1234
1 0 1

ИНВАРИАНТНЫЙ

(фантастический рассказ)

Дж. Д. ПИРС

Вам, разумеется, в основном известно все, что касается Хомера Грина. Значит, мне нет нужды рассказывать об этом. Я и сам многое знал, но тем не менее, когда мне довелось, одевшись по-старинному, попасть в этот необыкновенный дом и повстречаться с Грином, я испытал странное чувство.

Сам дом, пожалуй, не назовешь таким уж необыкновенным — не больше, чем его изображения. Зажатый между другими зданиями XX века, он, вероятно, хорошо сохранился и не выделяется на фоне окружающих его старинных домов. Но несмотря на предварительную психологическую подготовку, когда я вошел, ступил на ковер, увидел кресла, обитые ворсистой тканью, и принадлежности для курения, услышал (и увидел) примитивный радиоприемник (хотя мне было известно, что он воспроизводит старые записи) и, наконец, самое удивительное — смог взглянуть на разожженный в камине огонь, меня охватило ощущение нереальности.

Грин сидел на своем обычном месте, в кресле, у огня. У его ног лежала собака. Я не мог забыть, что он, судя по всему,— один из ценнейших людей на Земле. Но чувство нереальности происходящего, навеянное окружающей обстановкой, владело мною по-прежнему, и сам Грин тоже казался мне нереальным. Я почувствовал острую жалость к нему.

Ощущение нереальности не исчезло и потом, когда я представился. Сколько людей побывало здесь? Конечно, это можно было бы узнать заранее, из отчетов.

— Я Кэрью, из Института,— сказал я.— Мы с вами никогда не встречались, но мне сказали, что вы будете рады меня видеть.

Грин встал и протянул мне руку. Я с готовностью пожал ее, хотя этот жест был для меня непривычен.

— Да, я рад вас видеть,— сказал Грин.— Я тут чуть-чуть вздремнул. Вся эта процедура вызывает что-то вроде легкого шока. Поэтому я и решил немного передохнуть. Надеюсь, что мой препарат будет действовать вечно. Садитесь, пожалуйста,— добавил он.

Мы расположились у камина. Собака, вставшая было при моем появлении, снова улеглась и прижалась к ногам хозяина.

— Вам, наверное, хотелось бы проверить мои реакции? — спросил Грин.

— Да нет, это не к спеху, можно и позже,— ответил я.— У вас здесь так уютно.

Отвлечь Грина было легче легкого. Он расслабился и стал смотреть в огонь.

Не буду подробно излагать содержание нашей краткой беседы. Она воспроизведена в моей диссертации «Некоторые аспекты двадцатого века» (см. приложение А) и была, как известно, весьма непродолжительной. Мне очень повезло, что я получил разрешение на встречу с Грином.

Как я уже упоминал, беседа, приведенная в приложении А, продолжалась недолго. Материалы, сохранившиеся от XX века, намного более насыщенны, чем память Грина, содержание которой давно и подробно изучено. Как известно, рождению новых мыслей способствует не сухая информация, а личный контакт, безгра-

---

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Практичное изобретение» (М: Мир, 1974).

ничное разнообразие возникающих ассоциаций и человеческая теплота, которая оказывает стимулирующее воздействие.

Итак, я был у Грина и имел в своем распоряжении целое утро. Грин, как всем известно, ест три раза в день, а в перерывах между едой к нему допускается только один посетитель. Я испытывал к нему чувство благодарности и симпатии, но все же был несколько не в своей тарелке. Мне хотелось поговорить с ним о том, что ближе всего его сердцу. Разве это не естественно? Я записал и эту часть нашей беседы, но не стал ее публиковать. В ней нет ничего нового. Возможно, она тривиальна, но для меня она значила очень много. Разумеется, это глубоко личное воспоминание. И все-таки мне кажется, что и для вас это будет небезынтересно.

— Что послужило толчком к вашему открытию? — спросил я его.

— Саламандры,— ответил он без тени сомнения,— саламандры.

Отчет о его опытах, связанных с полной регенерацией тканей, как известно, давно опубликован. Сколько тысяч раз Грин повторял свой рассказ? Но клянусь, в моей записи есть некоторые отклонения от опубликованного отчета. Все-таки число возможных комбинаций практически бесконечно! Но каким образом явление регенерации оторванных конечностей у саламандр навело его на мысль о полной регенерации частей человеческого тела? Почему бы, скажем, не добиться того, чтобы на месте зажившей раны появился не шрам, а точная копия первоначальной ткани? Как при нормальном метаболизме добиться регенерации тканей, причем без изменений, происходящих при старении организма? Как в точности восстановить первоначальную форму, и притом всегда и во всех случаях? Вам демонстрировали это на животных при прохождении обязательного курса биологии. Помните цыпленка, у которого с помощью метаболизма замещаются ткани, но они всегда остаются неизменными, инвариантными? Страшно представить, что то же самое может быть и у человека. Грин выглядел молодо, он казался моим ровесником. А ведь он родился в двадцатом веке...

Рассказав о своих опытах, включая и последнюю прививку, которую он сделал накануне вечером самому себе, Грин стал пророчествовать.

— Я уверен,— сказал он, что действие препарата будет вечным.

— Да, доктор Грин,— заверил я его,— действительно, это так.

— Не к чему торопиться,— заметил он,— прошло слишком мало времени...

— А вам известно, какое сегодня число, доктор Грин? — спросил я.

— Одиннадцатое сентября тысяча девятьсот сорок третьего года, если вам угодно,— ответил он.

— Доктор Грин, сегодня четвертое августа две тысячи сто семидесятого года,— сказал я ему серьезно.

— Бросьте шутить,— сказал Грин,— если бы так было на самом деле, я был бы одет иначе, да и на вас была бы другая одежда.

Разговор зашел в тупик. Я вынул из кармана коммуникатор и начал демонстрировать прибор, показав напоследок объемное изображение со стереозвуком. Грин наблюдал за моими манипуляциями со все возрастающим удивлением и восторгом. Сложное устройство, но человек эпохи Грина мог ожидать от будущего такого развития электронной техники. Казалось, Грин забыл о разговоре, из-за которого мне пришлось достать коммуникатор.

— Доктор Грин,— повторил я,— сейчас две тысячи сто семидесятый год. Мы в двадцать втором веке.

Он растерянно оглядел меня, но уже без недоверия. На его лице отразился ужас.

— Несчастный случай? — спросил он.— У меня выпадение памяти?

— Никакого несчастного случая не было,— сказал я.— Ваша память в полном порядке, только... Выслушайте меня. Сосредоточьтесь.

И я рассказал ему обо всем коротко, в общих чертах, так чтобы он мог поспевать за моей мыслью. Он с тревогой смотрел на меня, по-видимому, его мозг работал напряженно. Вот что я ему сказал:

— Сверх всяких ожиданий, ваш эксперимент удался. Ваши ткани получили способность восстанавливаться полностью без всяких изменений. Они стали инвариантными.

Фотографии и точнейшие измерения показывают это с полной очевидностью, хотя прошло уже много лет, прошли века. Вы точно такой же, каким были двести лет назад.

За это время с вами происходили несчастные случаи. Но любые раны — и незначительные, и глубокие — залечиваются на вашем теле, не оставляя ни малейших следов. Ваши ткани инвариантны, и мозг ваш тоже инвариантен, точнее, инвариантны его клеточные структуры. Мозг можно сравнить с электрической сетью. Память — это сеть, катушки, конденсаторы, их соединения. Сознание — процесс мышления — не что иное, как распределение напряжений в этой сети и текущие в ней токи. Этот процесс сложен, но он носит временный характер. Выражаясь языком электротехники, это переходный процесс. Память же изменяет саму структуру мозговой сети, влияя на все последующие мысли, то есть на распределение токов и напряжений в сети. В вашем мозгу сеть никогда не изменяется. Она тоже инвариантна.

Иными словами, можно провести аналогию между мыслительными процессами и работой реле и переключательных устройств в вашем XX веке, сравнить память со схемой соединения отдельных элементов. В мозгу всех остальных людей схемы соединения элементов с течением времени изменяются, элементы соединяются и разъединяются, появляются новые соединения, соответствующие изменениям в памяти. В вашем же мозгу схема соединений никогда не меняется. Она инвариантна.

Другие люди могут приспосабливаться к новому окружению, узнавать, где лежат необходимые вещи, изучать расположение комнат, адаптироваться к внешней среде, но вы этого не можете, потому что ваш мозг инвариантен. Вы связаны привычками с этим домом, он остался точно таким же, как в тот день, когда вы испытали на себе свое средство. Ваш дом вот уже двести лет как держат в полном порядке, подновляют, чтобы вы могли в нем жить, не испытывая никаких неудобств. Вы здесь живете постоянно, с того самого дня, как ваш мозг стал инвариантным.

Не думайте, что вы ничем не отвечаете на заботу о вас. Вы, быть может, являете собой самую большую ценность в мире. Утром, днем и вечером — три раза в день — вас разрешают посещать тем немногим счастливцам, которые заслужили эту честь или нуждаются в вашей помощи.

Я изучаю историю. Я пришел, чтобы увидеть двадцатый век глазами интеллигентного человека этого столетия. Вы необыкновенно умный, блестящий человек. Ваш разум изучен лучше, чем любой другой. Трудно найти человека, превосходящего вас по силе мысли. Мне бы хотелось, чтобы ваш могучий мозг, соединенный с огромной наблюдательностью, помог мне в исследовании XX века. Я пришел поучиться у вашего мозга — свежего источника, не заблокированного, не измененного прошедшими годами, оставшегося точно таким же, каким он был в тысяча девятьсот сорок третьем году.

Но речь не обо мне. К вам приходят выдающиеся исследователи-психологи. Они задают вам вопросы, затем повторяют их, слегка изменив, и внимательно наблюдают за вашими реакциями. При этом каждый последующий эксперимент не искажается вашими воспоминаниями о предыдущем. Когда цепь мыслей у вас прерывается, в вашей памяти не остается никакого следа. Ваш мозг по-прежнему инвариантен. Поэтому психологи, которые в других случаях могут делать только самые общие выводы из простых опытов на многих индивидуумах, сильно отличающихся друг от друга, неодинаково подготовленных и по-разному реагирующих на раздражители, в вашем случае наблюдают изменения реакций при малейших изменениях стимулов. Кое-кто из этих ученых доводил вас до шока, но вы не в состоянии сойти с ума. Ваш мозг не может измениться. Он инвариантен.

Вы представляете такую ценность, что, кажется, без вашего инвариантного мозга человечество вообще не смогло бы прогрессировать. И все-таки мы больше никому не предложили произвести на себе такой эксперимент. На животных — пожалуйста. Взять хоть вашу собаку. Вы пошли на это сознательно, но ведь вы не представляли, каковы будут последствия. Вы оказали человечеству громадную услугу, не сознавая этого. Но мы уже не имеем права повторять такой опыт.

Голова Грина опустилась на грудь. Лицо его было озабоченным. Казалось, он искал утешения в тепле, идущем от камина. Собака, лежавшая у его ног, зашевелилась, и Грин взглянул на нее, неожиданно улыбнувшись. Я знал, что ход его мыслей был прерван. Переходные процессы затухали в мозгу. Наше свидание начисто исчезло из его памяти.

Я встал и тихонько вышел, не дожидаясь, пока он поднимет голову.

Перевод с английского В. Кона

Ответы, указания, решения

Литературно-художественные задачи

1. Если второй до встречи проехал 525 верст, то первый — $525+175=700$ верст. Так как время в пути одинаково, то отношение скоростей путешественников равно отношению пройденных ими расстояний, то есть $x/y=700/525=4/3$, где x и y — скорости путешественников (верст в день). По условию $y(x+y)=525$, т. е. $y(4y/3+y)=525$, откуда $y=15$ и $x=20$.

2. Сначала ответим на вопрос: что такое «бóльшая часть»? Из повседневной жизни известно, что это понятие означает: «больше половины, но не все». А раз так, то в коробке должны остаться и трех-, и пятирублевки. Но 20 рублей можно представить в виде суммы ненулевого количества трех- и пятирублевок единственным способом: 5 трехрублевок+1 пятирублевка.

Пусть отец Федор взял из коробки x трехрублевок и y пятирублевок (причем, как мы уже знаем, $x>5$, $y>1$). Тогда $3x+5y=50$ и $x=5(10-y)/3$. Так как $y>1$, то $x<5(10-1)/3=15$. Итак, $5<x<15$. Но из выражения для x видно, что x делится на 5. Поэтому $x=10$. Тогда $y=4$.

Ответ: отец Федор взял 10 трехрублевок и 4 пятирублевки, а оставил 5 трехрублевок и 1 пятирублевку.

3. Так как на ст. Воробьево партийцев на 12 больше, чем на ст. Грачево, то общее число служащих на ст. Воробьево (и вообще на каждой станции) не может быть менее 12. Попробуем сначала именно это наименьшее возможное значение: вдруг решение окажется единственным? Итак, пусть на каждой станции было по 12 служащих. Тогда на ст. Воробьево все 12 — партийцы, и ни комсомольцев, ни беспартийных нет. На ст. Грачево соответственно нет партийцев. По условию, на ст. Дроздово комсомольцев в 6 раз меньше, чем на остальных двух. Но так как на ст. Воробьево комсомольцев нет совсем, то отсюда следует, что на ст. Грачево комсомольцев в 6 раз больше, чем на ст. Дроздово. Поэтому число комсомольцев на ст. Грачево делится на 6, т. е. равно 6 или 12. Партийцев на ст. Грачево нет, поэтому число беспартийных там соответственно равно 6 или 0. Но последнее значение противоречит тому условию, что на ст. Грачево беспартийных на 6 больше, чем на двух остальных. Итак, на ст. Грачево 6 комсомольцев и 6 беспартийных, на ст. Дроздово комсомольцев в 6 раз меньше, т. е. 1, а беспартийных нет (поскольку на станциях Воробьево и Дроздово вместе взятых число беспартийных на 6 меньше, чем на ст. Грачево, т. е. равно 0). Остальные неизвестные определяются элементарно. Ответ удобно оформить в виде таблицы:

Станция	Партийцев	Комсомольцев	Беспартийных
Воробьево	12	0	0
Грачево	0	6	6
Дроздово	11	1	0

4. Из трех данных чисел два верных. Выбрать два из трех можно тремя способами, каждый из которых рассмотрим отдельно. Предварительно обозначим n-й член прогрессии через a_n, а знаменатель через q.

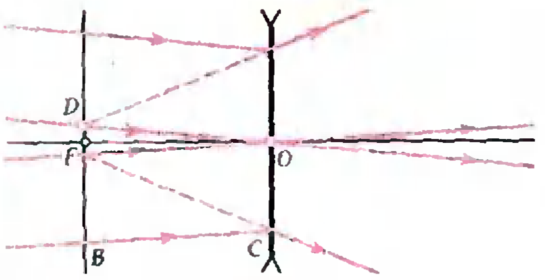


Рис. 1.

1) $a_1+a_2+a_3=28$, $q=9/2$. Так как $a_2=a_3/q$ и $a_1=a_3/q^2$, то $a_3(4/81+2/9+1)=28$, откуда $a_3=2268/103$.
2) $a_1+a_2+a_3=28$, $a_3=3q/2$. Тогда $a_2=a_3/q=3/2$ и $a_1=a_2/q=3/(2q)$. Поэтому $3/(2q)+3/2+3q/2=28$, откуда $q=(53\pm\sqrt{2773})/6$ и $a_3=3q/2=(53\pm\sqrt{2773})/4$.
3) $q=9/2$, $a_3=3q/2=27/4$.
Призовем на помощь странное условие о том, что a_3 — заплаченная сумма в рублях. Оно позволяет отсеять первые два случая, так как ни 2268/103 рублей, ни тем более $(53\pm\sqrt{2773})/4$ рублей заплатить невозможно. А вот $27/4=6$ руб. 75 коп.— вполне корректное значение. Итак, $a_3=27/4$, $q=9/2$ и $a_4=a_3q=243/8$.

5. Ясно, что число, делящееся на сумму двух других, должно быть больше каждого из них. Поэтому возможны лишь 4 принципиально различных способа выбрать делимое и два числа, дающих в сумме делитель. Рассмотрим их по порядку:
1) $\overline{ABBB}$ и $(\overline{ABB}+\overline{ABB})$, т. е. $1000A+111B$ делится на $200A+22B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 5, то разность, равная B, тоже должна делиться на делитель, а это возможно только если $B=0$. При этом A может принимать любое ненулевое значение.
2) $\overline{ABBB}$ и $(\overline{ABB}+\overline{AB})$, т. е. $1000A+111B$ делится на $110A+12B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 9, то разность, равная $10A+3B$, тоже должна делиться на делитель. Но $0<10A+3B<110A+12B$, поэтому деление нацело невозможно.
3) $\overline{ABBB}$ и $(\overline{AB}+\overline{AB})$, т. е. $1000A+111B$ делится на $20A+2B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 50, то разность, равная $11B$, тоже должна делиться на делитель. Во-первых, это возможно при $B=0$ (тогда A — любая ненулевая цифра). Если же $B\neq 0$, то должно выполняться равенство: $11B=k(20A+2B)$ (k — натуральное). Отсюда $(11-2k)B=20kA$. Здесь $A\neq 0$, т. к. иначе было бы $B=0$. Следовательно, т. к. A и B — натуральные, и $A/B\geqslant 1/9$, то $(11-2k)/20k\geqslant 1/9$, откуда $k\leqslant 2$. Таким образом, $k=1$ или 2. Если $k=1$, то $9B=20A$, и B делится на 20, что невозможно. Если же $k=2$, то $9B=40A$, и B делится на 40, что также невозможно.
4) $\overline{ABB}$ и $(\overline{AB}+\overline{AB})$, т. е. $100A+11B$ делится на $20A+2B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 5, то разность, равная B, тоже должна делиться на делитель, а это возможно только если $B=0$. При этом A может принимать любое ненулевое значение.
Таким образом, если одно из чисел делится на сумму двух других, то $B=0$ и $A\neq 0$, т. е. всегда $A>B$, и, значит, «дрянь» больше «дребедени».

6. Пусть возраст квартиранта равен N. В доме имеется на этажах $4\times 8=32$ окна и плюс 2 слуховых окна на крыше — всего 34 окна (не упустили ли вы эти два окна в своем решении?). Труб в доме 2, и потому год смерти бабушки равен $34\times 2\times N=68N$. Задача предлагалась в 1914 году. Ближайшее меньшее, делящееся на 68 — это $68\times 28=1904$, а предшествует ему $68\times 27=1836$. Последнее значение (и все еще меньшие) не дает возможности квартиранту лично присутствовать на похоронах. Итак, бабушка умерла в 1904 году.

Задачи на построение в тонких линзах

1. Находим построением фокальную плоскость (точка D), после чего строим ход луча BC (рис. 1).
2. См. рис. 2.
3. На 1 см в ту же сторону, что и линза.
4. $R=F-d=20$ см.

XVII Всероссийская олимпиада школьников

Математика

9 класс

1. Парабола $y=\frac{x^2}{2}$. Указание. Если параболы $y=x^2$ и $y=-x^2+bx+c$ касаются, то урав-

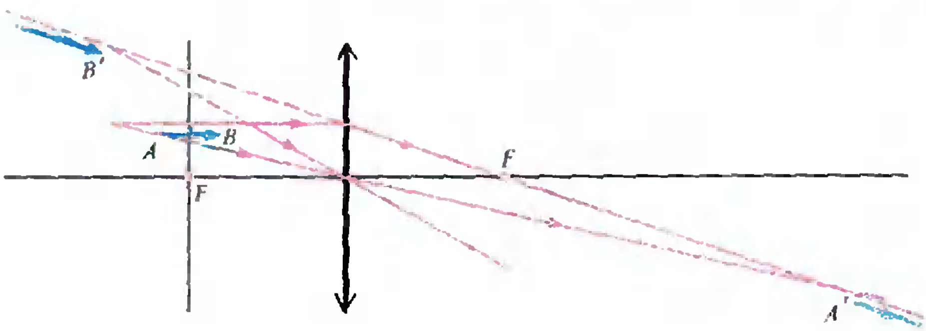


Рис. 2.

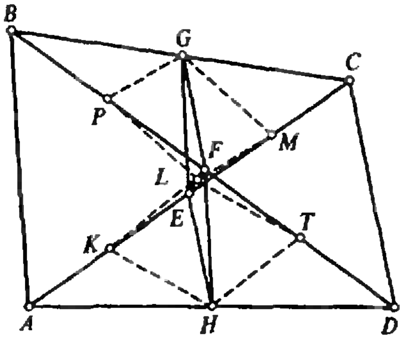


Рис. 3.

нение $x^2=-x^2+bx+c$ имеет единственный корень. Поэтому $c=-b^2/8$, а вершина параболы

$y=-x^2+bx-\frac{b^2}{8}$ — это точка $(b/2,\ b^2/8)$.

2. Указание. Рассмотрите окружность с диаметром AB и на ней точку F, симметричную точке E относительно AB. Точки D, C и F лежат на одной прямой. Поэтому KF — диаметр окружности и $\angle KEF=90°$.

3. Указание. Если $b>a>c$, то утверждение задачи следует из цепочки неравенств

$$a^2c+ab^2-a^2b-bc^2>a^2c+ab^2-a^2b-abc=$$
$$=a(b-a)(b-c)>0.$$

4. Выигрывает начинающий. Указание. Пронумеруем клетки полоски числами от 1 до 100. Назовем клетку выигрышной, если игрок, делающий ход из этой клетки, выигрывает, и проигрышной в противном случае. Всякая клетка, из которой можно пойти только в выигрышную клетку, является проигрышной. Наоборот, клетка, из которой хотя бы один ход ведет в проигрышную клетку, будет выигрышной. Теперь будем рассуждать «с конца». Клетка 100 — проигрышная. Поэтому клетка 99 — выигрышная, 98 — проигрышная, 97 — выигрышная и т. д. через одну клетку до 91-й. Все клетки от 81-й до 90-й выигрышные. Аналогично, выигрышные клетки от 71-й до 80-й чередуются, подобно клеткам от 91-й до 100-й, а все клетки с номерами 61—70 — выигрышные, и так далее. В итоге получим, что 1-я клетка — выигрышная.

5. Не существует. Указание. Докажите, что сумма кубов двух целых чисел не может при делении на 7 давать в остатке 3.

6. Указание. Решение основано на следующей лемме: если точки X, Y, Z, U — середины последовательных звеньев замкнутой ломаной $A_1A_2A_3A_4A_1$, то четырехугольник $XYZU$ — параллелограмм (докажите!).

Пусть E, G, F, H — середины отрезков AC, BC, BD и AD (рис. 3). По лемме, четырехугольники $EGFH$, $PGML$ и $KLTH$ — параллелограммы. Отсюда и следует утверждение задачи.

7. При четном n выигрывает начинающий, при нечетном n — его партнер. Указание. Назовем узел, лежащий внутри доски, свободным, если ни одна из входящих в него линий сетки еще не распилена. Каждый новый пропил ликвидирует ровно один свободный узел. В начале игры имеется $(n-1)^2$ свободных узлов. Докажите, что проигрывает игрок, делающий $((n-1)^2+$ $+1)$-й ход.

8. Указание. Если $a_k\leqslant a_{k+1}$ при $1\leqslant k<n$, то $\frac{a_k}{a_{k+1}}\leqslant 1$. При $a_k>a_{k+1}$ из условия следует, что $a_k<a_{k+1}+1$, т. е.

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}<1+\frac{1}{a_{k+1}}<2.$$

Итак, если неравенство $a_k>a_{k+1}$ выполняется при p значениях k, то

$$\frac{a_1}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\leqslant p+2(n-1-p).$$

В то же время

$$\frac{a_n}{a_1}=\frac{(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)+a_1}{a_1}<1+p,$$

откуда и следует, что $S<2n-1$.

10 класс

1. $p=2,\ q=3;\ p=3,\ q=2;\ p=q=2;\ p=1,\ q=5;\ p=5,\ q=1$. Указание. Корни x_1 и x_2 данного уравнения (если они есть) положительны. По теореме Виета

$$x_1+x_2=pq,\ x_1x_2=p+q,$$

откуда следует, что $(x_1-1)(x_2-1)+(p-1)\times$ $\times(q-1)=2$. Осталось рассмотреть 3 возмож-

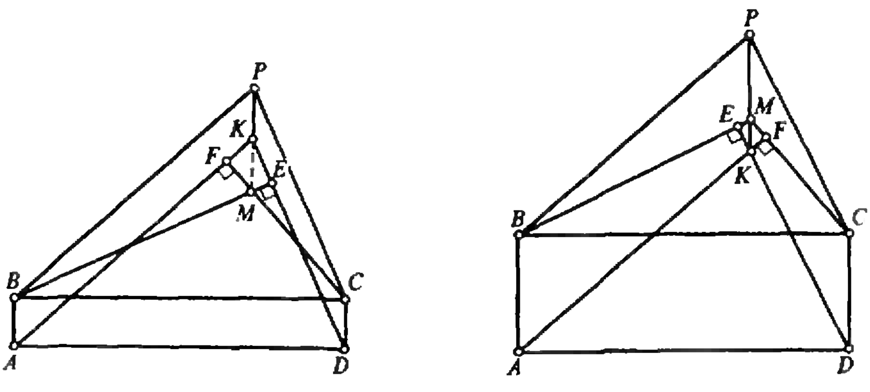


Рис. 4.

ных случая представления числа 2 в виде суммы двух целых неотрицательных слагаемых.
2. Указание. Пусть при параллельном переносе, переводящем точку A в точку B, а точку D — в точку C, точка K переходит в точку P. Пусть также точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C соответственно на KD и AK (рис. 4). Докажите, что M — точка пересечения высот треугольника BPC.
3. Проведем индукцию по числу кварталов n. При $n=1$ утверждение верно. Пусть оно верно для любого числа кварталов, меньшего k. Рассмотрим город, в котором k кварталов. Выберем площадь на границе города, из которой можно проехать внутрь города (если такой нет, то поменяем первоначальные направления движения на всех улицах на противоположные). Будем двигаться с этой площади по улицам, соблюдая направления движения, до тех пор, пока либо вновь не окажемся на границе города, либо не приедем на площадь, на которой уже побывали. В обоих случаях в городе выделяется район менее чем с k кварталами, который можно объехать вдоль его границы. По предположению индукции в нем найдется искомый квартал.
4. При $n=2$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $n>2$. Пусть в таблице есть строчка, содержащая ровно один нуль. Можно считать, что эта строчка имеет вид (011111). Тогда вместе с каждой строчкой $(1, a_2, ..., a_6)$ таблица содержит и строчку $(0, a_2, ..., a_6)$, т. е. в первом столбце не менее половины нулей. Предположим, что в таблице есть строчка ровно с двумя нулями — строчка (001111). Обозначим через b_{00} количество строчек таблицы, начинающихся с двух нулей. Аналогично определяются числа b_{10}, b_{01} и b_{11}. Как и в первом случае, $b_{00}\geqslant b_{11}$. Выберем из двух чисел b_{01} и b_{10} большее: пусть $b_{10}\leqslant b_{01}$. Теперь в первом столбце $b_{00}+b_{01}$ нулей и $b_{10}+b_{11}$ единиц, и $b_{00}+$ $+b_{01}\geqslant b_{10}+b_{11}$.
Пусть теперь в каждой строчке, кроме, быть может, строчки (111111), не менее трех нулей. Во всех них по три нуля быть не может. Действительно, так как $n>2$, то найдутся две различные строчки с тремя нулями, и их произведение будет содержать более трех нулей.

Вычеркнем из таблицы, если нужно, строчку (111111). Тогда в оставшейся таблице $(n-1)\times 6$ более половины клеток заняты нулями. Значит, есть столбец, в котором количество нулей больше $(n-1)/2$. Но тогда оно не меньше $n/2$, и утверждение доказано.
5. Указание. Пусть две мухи (назовем их A и B) сидят в концах одной диагонали куба. Если после перелета мухи A и B снова окажутся на одной диагонали, то в качестве третьей мухи C можно взять любую из остальных мух; если A и B окажутся в концах разных диагоналей, то за C можно принять муху, которая сядет на одну диагональ с мухой A.
6. а) См. рисунок 5. б) Указание. Каждый из прямоугольников 1×6 и 1×7 покроет не более одной из двадцати красных клеток, показанных на рисунке 6.
7. (2; 1), (2/5; $-1/5$).

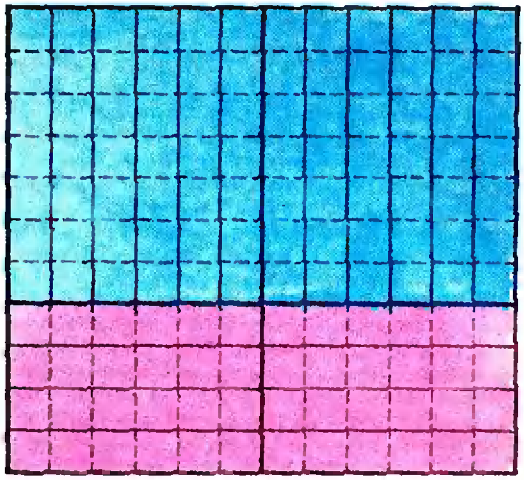


Рис. 5

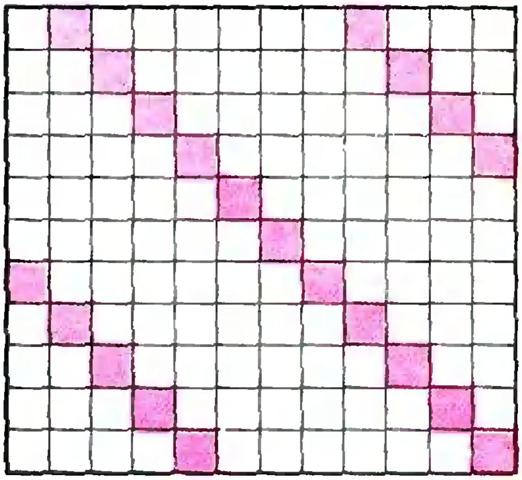


Рис. 6.

Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{12}{5x}-1, \\ \dfrac{1}{x^2+y^2}=1-\dfrac{4}{5y}, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{6}{5x}-\dfrac{2}{5y}, \\ 1=\dfrac{6}{5x}+\dfrac{2}{5y}. \end{cases}$$

Перемножив ее уравнения, сможем выразить y^2 через x^2. (Это решение предложено Романом Завражновым из Тамбова.)
8. Пусть a — произвольный делегат, A — множество из 10 выбранных им кандидатов. Пусть комиссия A не является «хорошей» для всех делегатов съезда. Это значит, что найдется делегат b такой, что множество B выбранных им

кандидатов не пересекается с A. Разобьем множество A на два подмножества A_1 и A_2 по 5 человек, а множество B — на два подмножества B_1 и B_2 тоже по 5 человек.

Докажем, что одна из четырех комиссий $A_i \cup B_j$, состоящих из 10 человек каждая, является «хорошей» для всех делегатов съезда. Предположим, что это не так. Это значит, что для каждой комиссии $A_i \cup B_j$ найдется делегат c_{ij}, для которого эта комиссия не является «хорошей». Пусть D — комиссия из двух человек, «хорошая» для шести делегатов a, b, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} (такая комиссия существует согласно условию задачи). Комиссия D является «хорошей» для делегатов a и b. Поэтому в ней есть один человек из комиссии A и один человек из комиссии B. Но комиссии A и B не пересекаются. Следовательно, один член комиссии D входит в A, другой — в B. Но тогда комиссия D содержится в одной из комиссий $A_{i_0} \cup B_{j_0}$, и, следовательно, не является «хорошей» для делегата $c_{i_0 j_0}$, что противоречит выбору D. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение не имеет места, т. е. среди четырех комиссий $A_1 \cup B_1$, $A_1 \cup B_2$, $A_2 \cup B_1$, $A_2 \cup B_2$ имеется комиссия, «хорошая» для всех делегатов съезда.

11 класс

1. 1989, 1990, 1991.

Пусть $n-1$, n, $n+1$ — последовательные целые значения переменной x, при которых данный многочлен принимает целые значения $m-1$, m, $m+1$ соответственно:

$$\begin{cases} 2(n-1)^3-60(n-1)^2+a(n-1)=m-1, \\ 2n^3-60n^2+an=m, \\ 2(n+1)^3-60(n+1)^2+a(n+1)=m+1. \end{cases}$$

Складывая первое и третье уравнения и вычитая удвоенное второе, после очевидных преобразований получаем, что $n=10$. Подставим $n=10$ в первые два уравнения системы. Вычитая получающиеся уравнения, находим $a=559$ и затем $m=1990$.

2. Докажем, что $AB=BC$. Предположим противное: пусть, например, $AB>BC$. Тогда $AE>EC$ и $AH>HC$. Следовательно, $S_{AEH}>S_{HEC}$ и $S_{AHF}>S_{HCD}$ (треугольники AHF и HCD подобны). Поэтому

$$S_{AEHF}=S_{AEF}+S_{AHF}>S_{HEC}+S_{HCD}=S_{HECD}.$$

Противоречие.

3. Так как $a+b+c=1$, то $1+a=(1-b)+(1-c)$. Отсюда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, получаем, что $1+a \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. Аналогично, $1+b \geqslant 2\sqrt{(1-c)(1-a)}$ и $1+c \geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$. Перемножив полученные три неравенства, приходим к требуемому неравенству.

4. Проведем из центра одного из отмеченных кубиков три попарно перпендикулярные прямые, параллельные ребрам куба. Затем проведем еще три прямые из центра другого отмеченного кубика. Очевидно, что по крайней мере две прямые не совпадут с проведенными ранее. Теперь проведем аналогичные прямые из центра третьего отмеченного кубика. Либо хотя бы две из них ранее не проводились, либо получим искомый треугольник. Продолжая описанный процесс, получим в итоге либо искомый треугольник, либо проведем как минимум

$$3+2\left(\frac{3}{2}n^2-1\right)=3n^2+1 \text{ различных прямых,}$$

параллельных ребрам куба. Этого не может быть, так как параллельно каждому из трех направлений можно провести только n^2 различных прямых, т. е. количество всех таких прямых равно $3n^2$. Следовательно, возможен только первый случай.

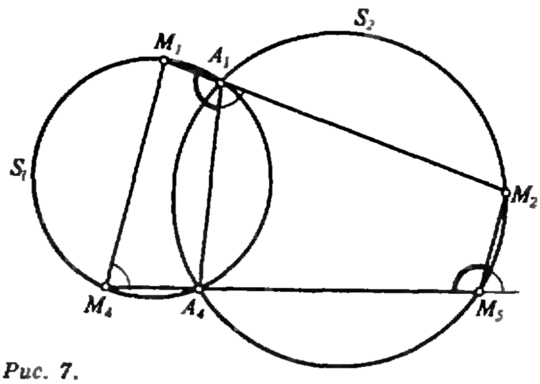


Рис. 7.

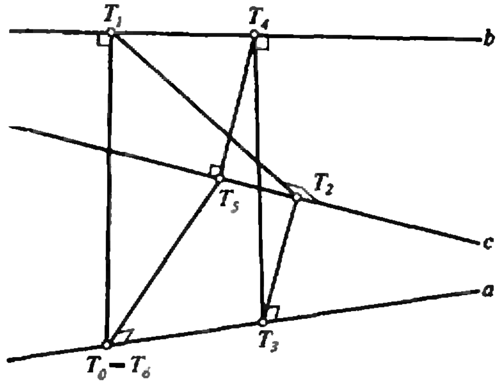


Рис. 8.

5. **Первое решение.** Пусть $t=\cos\frac{x+y}{2}$. Тогда исходное неравенство перепишется так:

$$4t^2-2t\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{4}=$$

$$=\left(2t-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\cos^2\frac{x-y}{2}\right)\geqslant 0.$$

Второе решение. Для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ справедливо неравенство $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2 \geqslant 0$, или

$$|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos x+$$
$$+2|\bar{b}|\,|\bar{c}|\cos y+2|\bar{c}|\,|\bar{a}|\cos(x+y)\geqslant 0,$$

где x — угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$, y — угол между $\bar{b}$ и $\bar{c}$, $x+y$ (или $2\pi-x-y$) — угол между

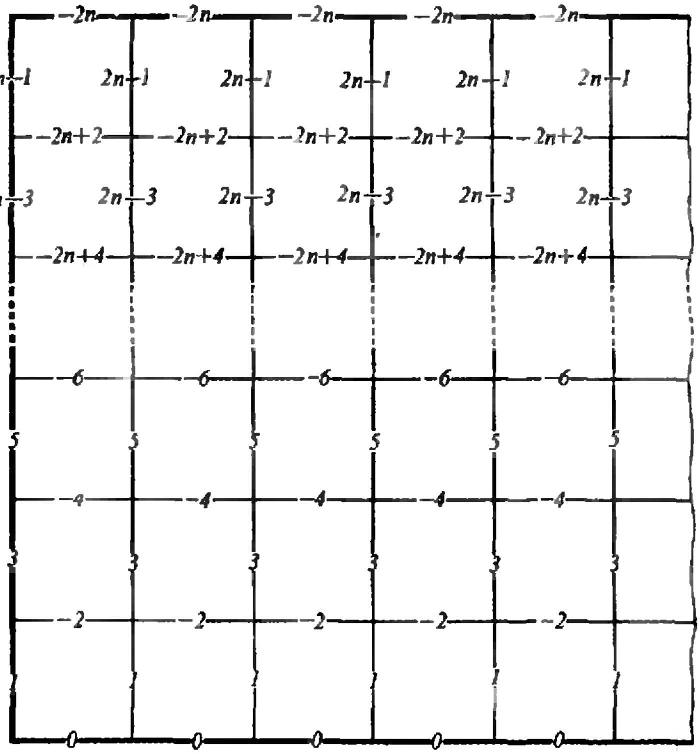


Рис. 9.

c и a. Взяв векторы a, b, c, образующие между собой (с точностью до периода) углы x, y, $x+y$ и такие, что $|\bar{a}|=|\bar{c}|=1$, $|\bar{b}|=\frac{1}{2}$, получим требуемое неравенство. (Это решение предложено Евгением Цыгановым из Белорецка.)

6. Рассмотрим окружности S_1 и S_2 (рис. 7). На этих окружностях расположены концы звеньев M_1M_2 и M_4M_5 нашей ломаной. Так как $\angle M_1M_4A_4=\angle A_4A_1M_2=180°-\angle A_4M_5M_2$, то $M_1M_4 \| M_2M_5$. Аналогично, $M_5M_2 \| M_6M_3$ и, наконец, $M_6M_3 \| M_7M_4$, т. е. $M_1M_4 \| M_7M_4$ и, значит, M_1 совпадает с M_7.

7. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Пусть P' и Q' — основания перпендикуляров, опущенных из точек P и Q на прямую l. Тогда $PQ \geqslant P'Q'$, причем равенство имеет место только в случае, когда прямые PQ и l параллельны.

Доказательство. Очевидно, что отрезки $P'P$ и $Q'Q$ лежат в плоскостях, перпендикулярных прямой l. Эти плоскости параллельны, расстояние между ними равно $P'Q'$. Следовательно, расстояние между точками P и Q не меньше $P'Q'$, причем $PQ=P'Q'$ только в случае, если отрезок $PQ \| l$. Лемма доказана.

Обратимся к поставленной задаче. Предположим противное: пусть точка T_3 отлична от T_0 (рис. 8). Тогда, согласно лемме, имеем: $T_3T_6 \leqslant T_2T_5 \leqslant T_1T_4 \leqslant T_3T_0$. Точки T_6 и T_0 совпадают, поэтому все неравенства обращаются в равенства. Это возможно лишь в случае, когда прямые a, b и c параллельны. В этом случае все построения осуществляются в одной плоскости, перпендикулярной этим прямым и имеющей с прямой a только одну общую точку T_0, совпадающую и с точкой T_6 и с точкой T_3.

8. Подсчет показывает, что каждое ребро решетки принадлежит ровно одному уголку. Каждому ребру решетки присвоим «вес» — целое число, указанное на рисунке 9. Под «весом» уголка будем понимать сумму «весов» ребер, образующих этот уголок. Из рисунка 9 видно, что «вес» любого уголка вида └ и ┘ равен 1, а «вес» любого уголка вида ┌ и ┐ равен −1. Сумма «весов» всех ребер решетки равна нулю. Поэтому, если число уголков вида └, ┘, ┌, ┐ равно x_1, x_2, x_3, x_4 соответственно, то $x_1+x_2=x_3+x_4$. Повернув решетку на 90° против часовой стрелки (при этом └→┘, ┘→┐, ┐→┌, ┌→└), аналогично предыдущему получаем равенство $x_2+x_4=x_1+x_3$. Сложив найденные два равенства, получаем, что $x_2=x_3$. (Это решение предложено Львом Мельниковским из Долгопрудного.)

Физика

9 класс

1. Решение этой задачи — см. задачу Ф1289 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.

2. $l_{min}=1$ м.
3. Решение аналогичной задачи — см. задачу Ф1283 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в восьмом номере журнала.
4. $v_{min}=\sqrt{g(r+2H)}\approx 5$ м/с; при изменении размеров комнаты ответ останется прежним.

10 класс

1. $\alpha=\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\,mg/(ka)+1)$.
2. $Q_{min}={}^3/_2(p_к V_к-p_н V_н)+{}^1/_2(p_к+p_н)\times$ $\times(V_к-V_н)\approx 71$ кДж, где $p_к$, $V_к$ — конечные, а $p_н$, $V_н$ — начальные значения давления и объема газа; $T_{max}\approx 589$ К.
3. $R_{AB}=3^{-1/2}\,r$.
4. Решение этой задачи — см. задачу Ф1285 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в восьмом номере журнала.

11 класс

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».
2. Решение аналогичной задачи — см. задачу Ф1289 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.
3. $Q=L_1\mathcal{E}/(R_1R_2)$.
4. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

«Квант»
для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. Площадь квартиры равна 16 м^2.
2. Д=6, В=3, А=1.
3. Разговор происходил в 1991 году.
4. Диме могло быть 10, 12 или 15 лет.
5. Соединим вершину A с точкой G — серединой стороны (рис. 10). Из симметрии следует,

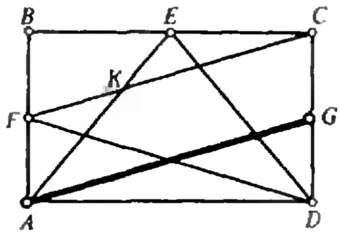


Рис. 10.

что углы EAG и EDF равны. Но углы EKC и EAG также равны, поскольку прямые FC и AG параллельны. Следовательно, угол EKC равен углу FDE.

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, Е. Коршунова, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин,
Э. Назаров, Л. Тишков, Г. Шиф,
В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова
Зав. редакцией С. Давыдова
Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.07.91. Подписано к печати 18.09.91.
Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,58.
Тираж 87 306 экз. Заказ 1208. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственной ассоциации предприятий, объединений
и организаций полиграфической промышленности
«АСПОЛ»
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ВО ВРЕМЯ МАТЧА

Матч на первенство мира между Г. Каспаровым и А. Карповым — крупнейшее событие в шахматном мире, и сильнейшие компьютеры не отказали себе в удовольствии посетить его. Они были не только зрителями, но и провели свои собственные турниры.

В Нью-Йорке, где проходила первая половина матча, состоялся 21-й чемпионат Северной Америки, мало чем отличающийся от чемпионатов мира среди суперкомпьютеров — те же «Дип сот», «Хайтек», «Мефисто» и еще шесть программ. Пять туров по швейцарской системе вывели на первые места двух корифеев — суперчемпиона «Дип сот» и микрочемпиона «Мефисто» — по 4 очка. «Дип сот» обыграл «Мефисто», тот взял верх над «Хайтек», который в свою очередь победил «Дип сот». И только одна лишняя ничья «Хайтек» внесла ясность в распределение мест. В турнире было сыграно немало интересных партий. Схватка двух будущих чемпионов состоялась во втором туре.

«Дип сот» — «Мефисто»
Дебют ферзевых пешек

1. Kf3 d5 2. e3 Kf6 3. c4 e6 4. Ce2 Kc6 5. d4 Cb4+ 6. Cd2 0—0 7. C:b4 K:b4 8. a3 Kc6 9. 0—0 Ka5 10. c5 b6 11. b4 Kc6 12. Kc3 bc 13. bc Фe7 14. Лb1 Cd7 15. Cb5 Лfb8 16. Фa4 Kd8 17. C:d7 K:d7 18. Фa5 Лc8 19. Kb5 a6 20. Kc3 Фf6 21. Лb3 Фg6 22. Лfb1 f6 23. Л1b2 h6 24. Kph1 Фd3 25. Ke2 Фd1+ 26. Kfg1 Kc6 27. Фa4 Kdb8 28. Kf4 Kpf7 29. Kd3 Лh8 30. Лb1 Фd2 31. Kf3 Фa5.

Игра протекала несколько скучновато — позиционная борьба с некоторой инициативой у белых. К тому же сейчас, похоже, размениваются ферзи, а вместе с ними и шансы сторон на перевес. Однако «Дип сот» проводит мощный тактический удар, сразу меняющий обстановку на доске. Комбинация столь эффектна, что попала в число лучших в 50-м, юбилейном выпуске «Шахматного информатора», самого популярного издания среди квалифицированных шахматистов.

32. Kde5+!! fe. Черные, может быть, и не хотят принимать жертву коня, но у них нет выбора. **33. K:e5+ Kpf6.** Единственный ход: в случае 33...Kpe7 решает 34. K:c6+, а если король отступает на крайнюю горизонталь, то после размена ферзей теряется конь b8.

34. Ф:a5 K:a5 35. Л:b8! Лh:b8 36. Л:b8 Л:b8 37. Kd7+ Kpe7 38. K:b8 Kc4. Вторую пешку белым выиграть не удается, однако и одной вполне достаточно для победы — слишком велика разница в силе коней.

39. K:a6 Kpd8 40. a4 Kb2 41. Kpg1 K:a4 42. Kpf1 Kpd7 43. f3 Kc3 44. Kb8+ Kpc8 45. Kc6 Kpd7 46. Ke5+ Kpe7 47. Kpe1 g5 48. Kpd2 Kb5 49. Kpc2 Kpf6 50. Kpb3 Ka7 51. Kpb4 h5 52. Kpa5 Kc8 53. g4 hg 54. fg Ke7 55. Kpa6 Kg8 56. Kpb7 Kpe7 57. Kp:c7 Kf6 58. c6 Ke8+ 59. Kpc8 Kpd6 60. Kpb7. Черные сдались.

А теперь посмотрите, как переиграл «Дип сот» ветерана компьютерных шахмат, третью чемпионку мира программу «Белл».

«Белл» — «Дип сот»
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. c3 d5 3. ed Ф:d5 4. Kf3 Kc6 5. d4 Cg4 6. Ce2 cd 7. cd e6 8. Kc3 Фa5 9. 0—0 Kf6 10. h3 Ch5 11. a3 Ce7 12. Ce3 Лd8 13. Cb5. Слабый ход, в духе позиции было 13. b4 Фc7 14. Фb3 с инициативой у белых. Вместо этого они теряют несколько темпов, чтобы... отдать своего хорошего слона.

13...0—0 14. C:c6 bc 15. g4 Cg6 16. Ke5 Фa6 17. f3 c5 18. Фe2. У белых ослаблен и королевский фланг, и центр, но в случае размена ферзей на e2 они могут рассчитывать на уравнение. Однако чемпион мира делает мастерский ход, разменивая ферзей в более выгодной для себя ситуации.

18...Cd3! 19. Ф:d3 Ф:d3 20. K:d3 cd 21. C:d4 Л:d4 22. Лfd1 Лfd8 23. Kf2 Cc5 24. Kpf1 Лd2 25. Л:d2 Л:d2 26. Kce4 K:e4 27. K:e4 Лh2 28. Лd1 Cb6 29. Лd2 Л:h3 30. Kpg2 Лh4. Черные выиграли пешку, осталось только освободить ладью.

31. Лd7 f5! 32. Kg5 fg 33. K:e6 gf+ 34. Kp:f3 g6 35. Лg7+ Kph8 36. Лe7 h5 37. Kf4 Лg4, и черные легко реализовали свой перевес в эндшпиле.

В Лионе, где игралась вторая половина матча, заодно был проведен юбилейный, 10-й по счету чемпионат мира среди микрокомпьютеров. Двенадцать роботов выясняли свои отношения в семи турах по швейцарской системе. «Мефисто» сделал всего одну ничью и, набрав 6,5 очков из семи, без труда завоевал — уже в седьмой раз подряд! — чемпионский титул. Вот быстрый разгром, учиненный «Мефисто» сопернику в последнем туре.

«Мефисто» — «Чесс симулятор»
Каталонское начало

1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. g3 d5 4. Cg2 dc 5. Фa4+ Kbd7 6. Ф:c4 a6 7. Kf3 b5 8. Фc6 Лa7 9. 0—0. Черные сыграли здесь 9...Cc5, рассчитывая забрать неприятельского ферзя. Однако многократный чемпион мира считает лучше своего неискушенного партнера. **10. dc! Cb7 11. Ф:b7 Л:b7 12. c6 Лb6 13. cd+ Ф:d7.** Три фигуры за ферзя — слишком много в такой ситуации. **14. Ce3 Лb8 15. Ke5 Фd6 16. Cf4 Фc5 17. Лc1 Фd4 18. Kc3 Лb6 19. Kc6 Фd7 20. Лd1 Фc8 21. Ce3 Kd7 22. C:b6 cb 23. Ke4 Фc7 24. Kd6+ Kpf8 25. Лac1 Kc5 26. Ke5 f6 27. Kef7 Лg8 28. b4.** Черные сдались.

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

Многим читателям журнала хорошо известна головоломка «Ханойская башня», состоящая из обычной детской пирамидки и еще двух стержней. Разрешается перекладывать диски пирамидки с одного стержня на другой, соблюдая следующее правило: можно класть лишь меньший диск на больший. Требуется переложить все диски с первого стержня на третий, при условии, что они лежали в порядке убывания размера. Известно, что такое перекладывание можно сделать за 2^n-1 ходов, где n — количество дисков на первом стержне.

Сейчас в продаже имеется вариант этой головоломки, в котором стержни заменены прорезями, диски — квадратиками, а размер диска указывает цифра на квадратике.

Наш читатель В. Пинаев предложил немного изменить правила: пусть первоначально диски находятся на первом стержне не в порядке убывания, а в некотором произвольном порядке. Возможно ли в этом случае собрать диски на третьем стержне по правилам перекладывания? На рисунке дан один из вариантов размещения дисков на первом стержне в начальном положении.

Об этой и других разновидностях «Ханойской башни» читайте в одном из следующих номеров журнала.

А. П.